(令 4 前)

数　　学

(理　科　系)

(1～5ページ)

・ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学(理科系)　150点

1. 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定める．以下の問に答えよ．(配点30点)

(1) すべての自然数 n について $a_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$ が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定める．b_n の値を n を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

2. m を 3 以上の自然数，$\theta = \dfrac{2\pi}{m}$，C_1 を半径 1 の円とする．円 C_1 に内接する（すべての頂点が C_1 上にある）正 m 角形を P_1 とし，P_1 に内接する（P_1 のすべての辺と接する）円を C_2 とする．同様に，n を自然数とするとき，円 C_n に内接する正 m 角形を P_n とし，P_n に内接する円を C_{n+1} とする．C_n の半径を r_n，C_n の内側で P_n の外側の部分の面積を s_n とし，$f(m) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) r_n, s_n の値を θ, n を用いて表せ．

(2) $f(m)$ の値を θ を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} f(m)$ を求めよ．
ただし，必要があれば $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ を用いてよい．

3. a を実数，$0 < a < 1$ とし，$f(x) = \log(1 + x^2) - ax^2$ とする．以下の問に答えよ．(配点30点)

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) $f(1) = 0$ とする．曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

4. a を正の実数とし，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ と直線 $y=\sqrt{a}\,x+\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P，Q で交わっているとする．線分 PQ の中点を R$(s,\,t)$ とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) s,t の値を a を用いて表せ．

(3) a が (1) で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) t の値を s を用いて表せ．

5. a，b を実数，p を素数とし，$1 < a < b$ とする．以下の問に答えよ．（配点30点）

(1) x，y，z を 0 でない実数とする．$a^x = b^y = (ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ であることを示せ．

(2) m, n を $m > n$ をみたす自然数とし，$\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$ とする．m, n の値を p を用いて表せ．

(3) m, n を自然数とし，$a^m = b^n = (ab)^p$ とする．b の値を a, p を用いて表せ．