令 和 6 年 度

数 学

注意事項

1. 問題は**4題**で，すべて**必答**問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙4枚)の該当する欄に記入しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「**裏面に続く**」と記入し，表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは書く方向が反対になります。
4. **図**や**グラフ**は解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて，ていねいにかきなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して，**論述式**の答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は，下書きやミスがないかどうか見直すのに十分活用しなさい。

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c を正の実数とする。このとき，不等式

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqq abc(a + b + c)$$

を証明せよ。また，等号が成り立つときの a, b, c の条件を求めよ。

(2) 鋭角三角形の 3 つの内角を A, B, C とおく。以下の問いに答えよ。

(a) 等式

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

を証明せよ。

(b) 不等式

$$\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} \geqq \sqrt{3}$$

を証明せよ。また，等号が成り立つときの鋭角三角形の条件を求めよ。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。なお，${}_n\mathrm{C}_r$ は二項係数を表す。

(1) A さんと B さんが将棋の対局をくり返し行い，先に 3 回勝った方が優勝するものとする。A さんが B さんに 1 回の対局で勝つ確率は p であるとする。また各対局において引き分けはないものとする。このとき，A さんが優勝する確率を p の式として表せ。

(2) (1)において $p = 0.75$ であるときに，A さんが優勝する確率を，小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ。

(3) (1)において「先に 3 回」を「先に N 回」(N は 2 以上の自然数)にしたときの A さんが優勝する確率を p と N の式として表せ。必要ならば和の記号 Σ や二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いてもよい。

(4) すべての自然数 m について

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{m+k}\mathrm{C}_k}{2^k} = 2^m - 1$$

であることを証明せよ。

3 以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+k} & (n\text{ が偶数}(n=2m)\text{のとき}), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m-1+k} & (n\text{ が奇数}(n=2m-1)\text{のとき}) \end{cases}$$

を証明せよ。

(2) (1)の左辺において $n \to \infty$ として，区分求積法を用いて無限級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

の和の値を求めよ。

(3) (2)の無限級数の項の順序を入れ替えてできる無限級数

$$1\underbrace{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{2\text{項}}+\frac{1}{3}\underbrace{-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{2\text{項}}+\frac{1}{5}\underbrace{-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}_{2\text{項}}+\cdots$$

の和の値を求めよ。

(4) 上の結果からどのようなことが考察されるか。「有限」と「無限」という言葉を用いて述べよ。

4 正方形の紙 α に下図のような座標軸をとり，2点A$(0, 1)$，B$(-2, 0)$，および，2直線 $y=-1$，$x=2$ を定める。以下この2直線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 と表す。このとき，点Aを直線 ℓ_1 上の点A$'(a,\ -1)$に重ねて α を折ったときにできる折り目の直線を $\ell_3(a)$ とする。ただし，A$'$ は α 上にとることとし，また，以下の操作はすべて α 上で行うこととする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 $\ell_3(a)$ の方程式を，a を用いて表せ。

(2) 点Aが直線 ℓ_1 上に位置するように α を折り，そのときにできる折り目により，α を2つに分割する。このとき，点Aが直線 ℓ_1 上に位置するような，どのような折り方をしても，その折り目に対して常に点Aと同じ側にある点全体の集合の境界線の方程式を求めよ。

(3) 点Aが直線 ℓ_1 上の点A$'$ に重なると同時に，点Bが直線 ℓ_2 上の点に重なるように α を折るとき，a の値を求めよ。