令　和　5　年　度

数　　学

注意事項

1. 問題は**4題**で，すべて**必答**問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙4枚)の該当する欄に記入しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「**裏面に続く**」と記入し，表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは書く方向が反対になります。
4. **図**や**グラフ**は解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて，ていねいにかきなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して，**論述式**の答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は，下書きやミスがないかどうか見直すのに十分活用しなさい。

1 以下の枠内の問題

問題

次の条件を満たす係数が整数の多項式$f(x)$を考える。

(I) $f(0)$は4で割り切れない。

(II) 方程式$f(x) = 0$は$x = 1$で重解をもつ。

(III) 方程式$f(x) = x(x-1)(x-2)$は異なる整数解をもつ。

このとき，$f(4)$を36で割ったときの余りを求めよ。

に対する右の答案Aに対して，2つの下線部(a)および(b)の詳しい証明を与えよ。ただし，2つの波線部の事実は証明なしに用いてよい。

答案 A

条件(II)より，因数定理を用いれば$f(x)=(x-1)^2g(x)$を満たす係数が整数の多項式$g(x)$が存在する。このとき，条件(III)を満たす整数解の中で1以外の解x_0をとれば，

$$(x_0-1)g(x_0)=x_0(x_0-2) \qquad \cdots\cdots(\#)$$

が成立する。ここで，$g(x_0)$は整数であるから，式(#)を満たすx_0は0または2である。(a) もし$x_0=0$とすれば，$f(0)=0$となり，この値は4で割り切れるから，条件(I)に反する。ゆえに$x_0\neq 0$であるから$x_0=2$であり，このとき，式(#)より

$$g(2)=0$$

であるから，再び因数定理を用いれば，

$$g(x)=(x-2)h(x)$$

を満たす係数が整数の多項式$h(x)$が存在する。よって，

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)h(x)$$

と表すことができるから，$h(4)$は奇数である。(b) 以上より，整数mを用いて$h(4)=2m+1$とおけば

$$f(4)=18h(4)=36m+18$$

であるから，$f(4)$を36で割ったときの余りは18である。

2 医療で使われる技術の１つとして，磁気共鳴画像法(MRI)がある。MRI は画像の濃淡を表す関数，例えば

$$M(x) = \lim_{n \to \infty} I_n(x) \qquad (x \text{ は実数})$$

を用いて体内の様子を可視化する技術である。ここで，$I_n(x)$ は

$$I_n(x) = \int_0^n e^{-t} \cos(tx)\, dt \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。以下の問いに答えよ。

(1) 定積分 $I_n(x)$ を求めよ。

(2) 極限 $M(x) = \lim_{n \to \infty} I_n(x)$ を求めよ。

(3) 関数 $y = M(x)$ について，増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，そのグラフをかけ。

3 Sを実部，虚部ともに整数であるような0以外の複素数全体の集合，Tを偏角が0以上$\dfrac{\pi}{2}$未満であるようなSの要素全体の集合とする。ただし，複素数zの偏角を$\arg z$とするとき$0 \leqq \arg z < 2\pi$の範囲で考えることとする。また，iは虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha = 2$，$\beta = 1 + i$，$\gamma = 1$のとき，$|\alpha\beta\gamma|$の値を求めよ。

(2) 複素数zについて，$\arg z = \dfrac{\pi}{8}$のとき$\arg(iz)$の値を求めよ。

(3) α，β，γをTの要素とする。このとき，$0 < |\alpha\beta\gamma| \leqq \sqrt{5}$を満たす$\alpha$，$\beta$，$\gamma$の組の総数$k$の値を求めよ。

(4) α, β, γをSの要素とする。このとき，$0 < |\alpha\beta\gamma| \leqq \sqrt{5}$および

$$\frac{\pi}{8} \leqq \arg(\alpha\beta\gamma) < \frac{5}{8}\pi$$

を満たすα，β，γの組の総数をmとするとき，mをkで割った商と余りを求めよ。

4 $\triangle ABC$ において，$BC = 3$，$AC = b$，$AB = c$，$\angle ACB = \theta$ とする。b と c を素数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $b = 3$，$c = 5$ のとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) $\cos\theta < 0$ のとき，$c = b + 2$ が成り立つことを示せ。

(3) $-\dfrac{5}{8} < \cos\theta < -\dfrac{7}{12}$ のとき，b と c の値の組をすべて求めよ。