令　和　4　年　度

数　　　学

注意事項

1. 問題は4題で，すべて必答問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙4枚)の該当する欄に記入しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「裏面に続く」と記入し，表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは書く方向が反対になります。
4. 図やグラフは解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて，ていねいにかきなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して，論述式の答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は，下書きやミスがないかどうか見直すのに十分活用しなさい。

1 媒介変数 $t\ (t \geqq 0)$ に対して，$x = \dfrac{4}{\sqrt{3}} t^{\frac{3}{2}}$，$y = 2t$ で表される曲線 C 上に点 P_1 と P_2 がある。原点から点 P_1 までの曲線の長さは $\dfrac{28}{9}$ であり，点 P_2 における曲線 C の接線の傾きは $\dfrac{1}{3}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P_1 の座標 $(x_1,\ y_1)$ を求めよ。

(2) 点 P_2 の座標 $(x_2,\ y_2)$ を求めよ。

(3) 曲線 C と y 軸，および 2 直線 $y = y_1$，$y = y_2$ で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体を考える。この回転体の体積を求めよ。

$\boxed{2}$ s を実数，t を 0 以上の実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - sx^2 + (t - 2s^2)x + st$$

により定める。関数 $f(x)$ に対して次の条件 p を考える。

p ：$0 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対して $f(x) > 0$ である。

このとき，条件 p を満たす点 $(s,\ t)$ の領域を図示せよ。

3 以下の問いに答えよ。

(1) e を自然対数の底とする。このとき，すべての自然数 n について

$$e^x \geqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad (x \geqq 0)$$

を証明せよ。

(2) 半径 1 の円に外接する正 12 角形の面積を求めよ。ただし，正 12 角形が円に外接するとは，正 12 角形のすべての辺が 1 つの円に接することである。

(3) (1)と(2)を用いて，不等式

$$\pi - e < \frac{3}{5}$$

を証明せよ。ただし，$\sqrt{3} > 1.73$ は証明なしに用いてよい。

4 次の問題

問題

表面と裏面が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるコインを投げる試行を繰り返し，同じ面が3回連続して出た時点で試行を終了する。n 回投げ終えた段階で試行が終了する確率 p_n を求めよ。

に対する右の答案Aについて以下の問いに答えよ。

(1) もし答案Aに誤りがあれば誤りを指摘し，その理由を述べよ。ただし，すでに指摘してある誤った結論から論理的に導き出された結論を誤りとして指摘する必要はない。誤りがないときは「誤りなし」と答えよ。

(2) 答案Aで導かれた p_n と正解の p_n とで値が異なるとき，値が異なる最小の n を求め，その n に対する正解の p_n の値を答えよ。そのような n がないときは「すべて一致する」と答えよ。

答案A

自然数nに対して，コインをn回投げ終えた段階で，その後最短で試行が終了するために必要な回数がk回($k \geqq 0$)である確率を$p_n(k)$とする。このとき，kは0，1，2のいずれかであるから，確率の総和は

$$p_n(0)+p_n(1)+p_n(2)=1$$

である。また，

$$p_n(0)=p_n,\quad p_{n+1}(0)=\frac{1}{2}p_n(1),\quad p_{n+2}(0)=\frac{1}{4}p_n(2)$$

であるから漸化式

$$p_n+2p_{n+1}+4p_{n+2}=1 \quad (n \geqq 1)$$

を得る。ここで，$\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{4}{7}=1$なので，$q_n=2^n\left(p_n-\dfrac{1}{7}\right)$とすれば

$$q_n+q_{n+1}+q_{n+2}=0$$

である。よって$n \geqq 4$に対して

$$q_n=-q_{n-1}-q_{n-2}=(q_{n-2}+q_{n-3})-q_{n-2}=q_{n-3}$$

が成立する。以上より，

$$Q(n)=\begin{cases} q_1 & (n\text{を}3\text{で割ったときの余りが}1\text{のとき}) \\ q_2 & (n\text{を}3\text{で割ったときの余りが}2\text{のとき}) \\ q_3 & (n\text{が}3\text{で割り切れるとき}) \end{cases}$$

とすれば求める確率は

$$p_n=\frac{q_n}{2^n}+\frac{1}{7}=\frac{Q(n)}{2^n}+\frac{1}{7} \quad (n \geqq 4)$$

である。また，最初の2項は定義より$p_1=p_2=0$でありp_nの漸化式で$n=1$とすれば$p_1+2p_2+4p_3=1$であるから$p_3=\dfrac{1}{4}$である。さらに

$$q_1=-\frac{2}{7},\quad q_2=-\frac{4}{7},\quad q_3=\frac{6}{7}$$

である。したがって

$$p_1=p_2=0,\quad p_3=\frac{1}{4},\quad p_n=\frac{Q(n)}{2^n}+\frac{1}{7} \quad (n \geqq 4)$$

となる。