令　和　3　年　度

数　　　学

注意事項

1. 問題は**4題**で，すべて**必答**問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙４枚)の該当する欄に記入しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「**裏面に続く**」と記入し，表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは書く方向が反対になります。
4. **図**や**グラフ**は解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて，ていねいにかきなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して，**論述式**の答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は，下書きや**ミスがないかどうか見直す**のに十分活用しなさい。

1 以下の問いに答えよ。なお，必要があれば等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

を利用してもよい。

(1) 実数 a，b，c に対して，不等式

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geqq 0$$

を証明せよ。また，等号が成り立つときの a，b，c の条件を求めよ。

(2) 正の実数 x，y，z に対して，P，Q，R を

$$P=\frac{x+y+z}{3}, \quad Q=\sqrt[3]{xyz}, \quad \frac{1}{R}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

とおく。このとき，不等式 $P \geqq Q \geqq R$ を証明せよ。また，各等号が成り立つときの x，y，z の条件を求めよ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) $AB = 4$，$AC = 3$ である三角形ABCの辺BCを $2:1$ に内分する点をDとする。また，$AD = 1$ とする。

(a) BCの長さを求めよ。

(b) (a)とは別の解法でBCの長さを求めよ。

(2) 焦点が $(0, 0)$，準線が $y = -2$ の放物線と直線 $y = 2$ の交点をPとする。

(a) Pの座標を求めよ。

(b) (a)とは別の解法でPの座標を求めよ。

$\boxed{3}$ 階段を一度に1段登る，または1段飛ばして登る登り方をするとき，n 段目までの登り方の総数を a_n とする。例えば，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 3$ である。以下の問いに答えよ。

(1) n を3以上の整数とする。$n - 1$ 段目を踏む n 段目までの登り方の総数を b_n, $n - 1$ 段目を踏まない n 段目までの登り方の総数を c_n とする。b_n，c_n を a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1} を用いて表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ が存在することを認めて，この極限値を求めよ。

(3) n を2以上の整数とするとき，等式

$$a_{2n} = a_n^2 + a_{n-1}^2$$

が成立することを示せ。

4 n を3以上の奇数，k を $1 \leqq k < n$ を満たす整数とする。また，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sqrt[n]{x^{n-k}(x-1)^k}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x \to \infty$ のとき，$f(x) - ax$ が収束するように定数 a の値を定め，そのときの極限値を求めよ。

(2) $f(x)$ が原点で極値をもつための条件を求め，そのときの $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。