【医学科】

数　学　問　題

2021（令和３）年度

【注意事項】

1. 試験時間は 120 分である。
2. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない。ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
3. この問題冊子の印刷は１ページから４ページまでである。
4. 解答用紙は問題冊子中央に４枚はさみこんである。
5. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること。
6. 試験開始後，４枚ある解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること（１枚につき受験番号は２箇所，氏名は１箇所）。
7. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
8. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は，採点されない場合もあるので注意すること。
9. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない。
10. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
11. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び，指示に従うこと。
12. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔Ｉ〕以下の問いに答えなさい。ただし，解答のみを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1) 2 つの正の整数 a, b の最大公約数を G, 最小公倍数を L とするとき，

$$L^2 - G^2 = 72$$

が成り立ちます。このような正の整数の組 (a, b) をすべて求めなさい。

(2) 1 から 6 の目が等しい確率で出るサイコロを 3 つ同時に投げるとき，3 つの出た目の積が 4 の倍数になる確率を求めなさい。

(3) n を自然数, a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とするとき, 次の記述における $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ウ}}$ に適切な数値を入れなさい。

n の関数 $an^2 + bn + c$ が $n = 2$ で最大値をとるための必要十分条件は，$a < \boxed{\text{ア}}$ かつ $\boxed{\text{イ}} \leqq \dfrac{b}{a} \leqq \boxed{\text{ウ}}$ です。

(4) 曲線

$$y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 2$$

を C とし，異なる 2 点で C と接する直線を l とします。曲線 C と直線 l に囲まれる部分の面積を求めなさい。

〔II〕 n を 2 以上の自然数とします。1 から n の自然数が 1 つずつ書かれた n 枚のカードがあります。いま, カードに書かれた数の小さい順に n 枚のカードが左から右に並んでいます。このとき, 以下の「シャッフル」と呼ばれる操作を繰り返すことで, カードを並べかえることを考えます。

- まず, 1 以上 n 未満の自然数 k を 1 つ選び, 左から k 枚目までのカードのグループと, それ以外のカードのグループに分けます。
- 次に, それぞれのグループのカードの順番は変えずに, 2 つのグループのカードを適当に混ぜます。

たとえば $n = 5$ のとき, カードが

$$1, 2, 3, 4, 5$$

と並んでいるとします。いま, $k = 2$ として, 左から 2 枚目までのカード (1,2) とそれ以外のカード (3,4,5) の 2 つのグループに分けます。次に 2 つのグループのカードを混ぜて

$$3, 4, 1, 5, 2$$

のように並べかえると, 左から 2 枚目までのカード (1,2) と, それ以外のカード (3,4,5) の 順番はそのままなので, これはシャッフルです。シャッフルを行うごとに, 選ぶ k の値は 異なっても構いません。

以下の各問いに答えなさい。

(1) $n = 5$ のとき, 1 度だけシャッフルをすることを考えます。k として 2 を選んだ場合, 得られるカードの並び方は何通りあるか答えなさい。

(2) 1 度だけシャッフルをして得られるカードの並び方は 2^n 通り未満であることを証明しなさい。

(3)

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} < n!$$

を証明しなさい。

(4) $n = 130$ のとき, 3 回シャッフルを繰り返しただけでは得られないカードの並び方があることを証明しなさい。

〔Ⅲ〕漸化式

$$a_{n+1} = 3 - \frac{4}{a_n + 2}\ , \quad a_1 = 0 \ (n=1, 2, 3, \ldots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ について, 以下の各問いに答えなさい。

(1) $b_n = 1 - \dfrac{3}{a_n + 1}$ を満たす数列 $\{b_n\}$ は, すべての自然数 n に対して, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ が同じ値になることを証明しなさい。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい。

(3) 集合 A を $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{100}\}$, B を 100 以下の自然数全体の集合とするとき, 集合 $A \cap B$ の要素の数を求めなさい。

〔Ⅳ〕 n を自然数とするとき, 以下の各問いに答えなさい。

(1) $t = \tan x$ と置換することで, 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$ を求めなさい。

(2) 関数 $\displaystyle\frac{1}{\sin x \cos^{n+1} x}$ の導関数を求めなさい。

(3) 部分積分法を用いて

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^n x} = -\frac{1}{(n+1)\cos^{n+1} x} + \int \frac{dx}{\sin x \cos^{n+2} x}$$

が成り立つことを証明しなさい。

(4) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$ の値を求めなさい。