令和６年度前期日程入学試験学力検査問題

令和６年２月26日

数　　　学〔理系〕

志望学部／学科／専攻	試験時間	指定解答用紙
経済学部(理系) 理学部 医学部医学科 医学部保健学科放射線技術科学専攻 医学部保健学科検査技術科学専攻 歯学部 薬学部 工学部 農学部	10：00〜12：30 (150分)	Ⅰ，Ⅱ，Ⅲのマークの用紙(各表・裏)

注　意　事　項

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子，解答用紙を開いてはいけない。**
2. この問題冊子は，８ページである。問題冊子の白紙のページや問題の余白は草案のために使用してよい。なお，ページの脱落，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答は，必ず**黒鉛筆**(シャープペンシルも可)で記入し，ボールペン・万年筆などを使用してはいけない。
4. **解答用紙の受験記号番号欄(１枚につき２か所)には，忘れずに受験票と同じ受験記号番号をはっきりと判読できるように記入すること。**
5. 解答は，必ず**解答用紙の指定された**箇所に記入すること。
6. **解答用紙を持ち帰ってはいけない。**
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰ること。

——このページは白紙——

――――このページは白紙――――

前期：経済学部(理系)・理学部・医学部(医学科, 保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻)・歯学部・薬学部・工学部・農学部

$\boxed{1}$ a を正の実数とし，$f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする。O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y = f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p, f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q, f(q))$ とする。ただし，$q > 0$ とする。

(1) p, q の値を a を用いて表せ。また，$p > q$ であることを示せ。

(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分, 線分 OP, および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。S を a を用いて表せ。

(3) (2) の S に対し，$S = \dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1) t を $t > 1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

(a) $x > \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$

(b) $x \geqq 2 \log_t x$

をともに満たすとする。このとき，不等式

$$x + 1 > 2 \log_t (x + 1)$$

を示せ。

(2) $n \leqq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

（前期：経済学部（理系）・理学部・医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻）・歯学部・薬学部・工学部・農学部）

$\boxed{3}$ n を 2 以上の整数とする。それぞれ A, A, B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し，カードをもとに戻す試行を考える。この試行を n 回繰り返し，抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ，n 文字の文字列を作る。作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする。また，作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする。これらの場合以外は可とする。たとえば $n=6$ のとき，文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などは不可で，文字列 BABAAB や BABABA などは可である。作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n，作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n，作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく。

(1) $p_2,\ q_2,\ r_2$ をそれぞれ求めよ。また，$p_{n+1},\ q_{n+1},\ r_{n+1}$ を $p_n,\ q_n,\ r_n$ を用いてそれぞれ表せ。

(2) $p_n+2q_n+2r_n$ を n を用いて表せ。

(3) $p_n+iq_n-(1+i)r_n$ を n を用いて表せ。ただし，i は虚数単位である。

(4) $p_n=r_n$ を満たすための，n の必要十分条件を求めよ。

(前期：経済学部(理系)・理学部・医学部(医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻)・歯学部・薬学部・工学部・農学部)

$\boxed{4}$ xyz 空間において，点 $\mathrm{P}_1(3,-1,1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $\mathrm{P}_2(5,0,-1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える。

(1) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ。

(2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ。この交わりは円となる。この円を C とし，その中心を P_3 とする。C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ。

(3) (2) の円 C に対し，C を含む平面を H とする。xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。

(4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき，Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ。また，d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ。

（前期：経済学部(理系)・理学部・医学部(医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻)・歯学部・薬学部・工学部・農学部）

$\boxed{5}$ $x \geqq 2$ を満たす実数 x に対し，

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$$

とおく。必要ならば，$\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であること，および，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい。

(1) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき，関数 $g(x)$ （$x \geqq 2$）を求めよ。

(2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し，$g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ （$x \geqq 2$）の増減と極限 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を調べ，$y = f(x)$ （$x \geqq 2$）のグラフの概形を xy 平面上に描け。ただし，(2) の α を用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。

(4) $2 \leqq m < n$ を満たす整数 m, n の組 (m, n) に対して，等式

$$(*) \quad (2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする。このような組 (m, n) をすべて求めよ。

（前期：経済学部（理系）・理学部・医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻）・歯学部・薬学部・工学部・農学部）

$\boxed{6}$ xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C: x^2+y^2=1$ および円板 $D: x^2+y^2 \leqq 1$ を考える。D を底面とし点 $\mathrm{P}(0,0,1)$ を頂点とする円錐を K とする。$\mathrm{A}(0,-1,0)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$ とする。xyz 空間内の平面 $H: z=x$ を考える。すなわち，H は xz 平面上の直線 $z=x$ と線分 AB をともに含む平面である。K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする。$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，円 C 上の点 $\mathrm{Q}(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする。

(1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく。$r(\theta)$ を θ を用いて表せ。

(2) 円錐 K の側面のうち，曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分，線分 PA，および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく。θ と実数 h が条件 $0 \leqq \theta < \theta + h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h) - S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 円錐 K の側面のうち，円 C の $x \geqq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく。T を求めよ。必要であれば $\tan\dfrac{\theta}{2} = u$ とおく置換積分を用いてもよい。