入学試験問題

数　学(理科)

前

(配点 120 点)

令和 4 年 2 月 25 日　　14 時—16 時 30 分

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2　この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

4　2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問～第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問～第 6 問について解答しなさい。

5　**解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6　**解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7　**解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8　この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9　解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

◇M4(094—54)

TK

本日、23時以降、東進公式サイト
「東進ドットコム」にて
東大数学 解答例を掲載する予定です。
必ず解答例を確認し、しっかり復習することで
東大受験の学習に役立てましょう。

https://www.toshin.com

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $f(x)$ は区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において最小値を持つことを示せ。

(2) $f(x)$ の区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第　2　問

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n^2 + 1 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) 正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となることを示せ。

(2) $k,\ n$ を正の整数とする。a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を $k,\ n$ を用いて表せ。

(3) a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 $S(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式

$$0 \leqq x \leqq 3, \quad 0 \leqq y \leqq 3$$

が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 $A(3, 0)$, $B(3, 3)$ を考える。さらに，次の条件 (i), (ii) をともに満たす点 P をとる。

(i) 点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y = x^2$ 上にある。

(ii) 点 P は，3 点 O, A, B のいずれからも十分離れている。

点 P の x 座標を a とする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 次の条件 (iii), (iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。

(iii) 点 Q は領域 D の点である。

(iv) 点 Q は，4 点 O, A, B, P のいずれからも十分離れている。

(3) a は (1) で求めた範囲を動くとする。(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　4　問

座標平面上の曲線

$$C: \quad y = x^3 - x$$

を考える。

(1) 座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ。

(i) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。

(2) 次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(ii) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 ℓ と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　5　問

座標空間内の点 $A(0, 0, 2)$ と点 $B(1, 0, 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が $PQ = 2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　6　問

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k} = \left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots\cdots, \mathrm{X}_N$ を以下の規則 (i), (ii) に従って定める。

(i) X_0 は O にある。

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}} + \overrightarrow{v_k}$$

により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N=8$ とする。X_8 が O にある確率を求めよ。

(2) $N=200$ とする。X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし $0 \leqq r \leqq 200$ である。p_r を求めよ。また p_r が最大となる r の値を求めよ。

◇M4(094—67)

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）