（K—54—M）

# 令和５年度入学試験問題

# 数　　学

## Ⅰ　注　意　事　項

1. 指示があるまでこの冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は全部で，５ページです。**設問はⅠからⅢまであります。**
3. 解答用紙のマーク数字は，次の「良い例」のように，濃く正しく塗りつぶしなさい。**正しく塗りつぶされていない場合，採点できないことがあります。**

　　良い例………●
　　悪い例………

4. 解答用紙には解答欄の他に次の記入欄があるので，正確に記入しなさい。
　① 氏名欄……………………氏名を**漢字**と**フリガナ**で記入しなさい。
　② 受験番号欄………………６桁の受験番号を**算用数字**で記入し，**マーク欄の数字**を正しく塗りつぶしなさい。
5. 解答用紙の番号Ⅳの解答欄は空欄のままとしなさい。
6. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気がついた場合は，手を上げて申し出なさい。
7. 試験中に質問がある場合は，手を上げて申し出なさい。
8. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰りなさい。
9. 途中退場は認めません。

## Ⅱ　解答上の注意

**解答上の注意が裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，冊子を開いてはいけません。**

## Ⅱ　解答上の注意

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字(0 ～ 9)，または負の符号(－)が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 1　$\boxed{\text{アイ}}$ に －8 と答えたいとき

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | ⊖ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ |
| イ | ⊖ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ |

2　分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。負の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例 2　$\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ウ | ⊖ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ |
| エ | ⊖ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ |
| オ | ⊖ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ |

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ に $2\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2}$ と答えるところを，$1\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

問題は次のページから始まります。

I　複数の玉が入った袋から玉を1個取り出して袋に戻す事象を考える．どの玉も同じ確率で取り出されるものとし，$n$ を自然数として，以下の問いに答えよ．

(1)　袋の中に赤玉1個と黒玉2個が入っている．この袋の中から玉を1個取り出し，取り出した玉と同じ色の玉をひとつ加え，合計2個の玉を袋に戻すという試行を繰り返す．$n$ 回目の試行において赤玉が取り出される確率を $p_n$ とすると，次式が成り立つ．

$$p_2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad p_3 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

(2)　袋の中に赤玉3個と黒玉2個が入っている．この袋の中から玉を1個取り出し，赤玉と黒玉を1個ずつ，合計2個の玉を袋に戻す試行を繰り返す．$n$ 回目の試行において赤玉が取り出される確率を $P_n$ とすると，次式が成り立つ．

$$P_2 = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}},\quad P_3 = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

$n$ 回目の試行開始時点で袋に入っている玉の個数 $M_n$ は $M_n = n + \boxed{\text{ス}}$ であり，この時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数 $R_n$ は $R_n = M_n \times P_n$ と表される．$n$ 回目の試行において黒玉が取り出された場合にのみ，試行後の赤玉の個数が試行前と比べて $\boxed{\text{セ}}$ 個増えるため，$n+1$ 回目の試行開始時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数は $R_{n+1} = R_n + (1 - P_n) \times \boxed{\text{セ}}$ となる．したがって，

$$P_{n+1} = \frac{n + \boxed{\text{ソ}}}{n + \boxed{\text{タ}}} \times P_n + \frac{1}{n + \boxed{\text{チ}}}$$

が成り立つ．このことから，

$$(n+3) \times \left(n + \boxed{\text{ツ}}\right) \times \left(P_n - \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\right) \text{が } n \text{ に依らず一定}$$

となることがわかり，

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

と求められる．

II　$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ．

点Oを原点とする座標空間に3点A$(-1, 0, -2)$，B$(-2, -2, -3)$，C$(1, 2, -2)$がある．

(a)　ベクトル$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の内積は$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \boxed{\text{アイ}}$であり，△ABCの外接円の半径は$\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$である．

△ABCの外接円の中心を点Pとすると，$\overrightarrow{AP} = \boxed{\text{オ}}\,\overrightarrow{AB} + \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\overrightarrow{AC}$が成り立つ．

(b)　△ABCの重心を点Gとすると，$\overrightarrow{OG} = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$であり，線分OBを2：1に内分する点をQとすると，

$$\overrightarrow{AQ} = \left(\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}},\ \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \boxed{\text{タ}}\right)$$

となる．

(c)　線分OCを2：1に内分する点をRとし，3点A，Q，Rを通る平面$\alpha$と直線OGとの交点をSとする．点Sは平面$\alpha$上にあることから，

$$\overrightarrow{OS} = t\,\overrightarrow{OA} + u\,\overrightarrow{OB} + v\,\overrightarrow{OC}$$

$$\left(\text{ただし，} t,\ u,\ v \text{ は } t + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}u + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}v = 1 \text{ を満たす実数}\right)$$

と書けるので，$\overrightarrow{OS} = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\overrightarrow{OG}$となることがわかる．

平面$\alpha$上において，点Sは三角形AQRの $\boxed{\text{ヌ}}$ に存在し，四面体O–AQRの体積は，四面体O–ABCの体積の$\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$倍である．

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

①　辺AQ上　②　辺AR上　③　辺QR上　④　内　部　⑤　外　部

III　$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ．

座標空間において原点 O を中心とする半径 1 の円 $C$ が $xy$ 平面上にあり，$x > 0$ の領域において点 A$(0，-1，0)$ から点 B$(0，1，0)$ まで移動する $C$ 上の動点を P とする．

(1)　下記の 2 条件を満たす直角二等辺三角形 PQR を考える．

・点 Q は $C$ 上にあり，直線 PQ は $x$ 軸に平行である．

・点 R の $z$ 座標は正であり，直線 PR は $z$ 軸に平行である．

点 P が点 A から点 B まで移動するとき，三角形 PQR の周および内部が通過してできる立体 $V$ について，以下の問いに答えよ．

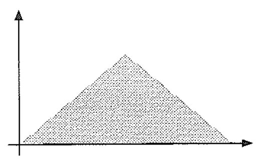
(a)　点 P が点 A から点 B まで移動するとき，線分 PR が通過してできる曲面の展開図は，横軸に弧 AP の長さ，縦軸に線分 PR の長さをとったグラフを考えればよく，$\boxed{\text{ア}}$ で表される概形となり，その面積は $\boxed{\text{イ}}$ である．

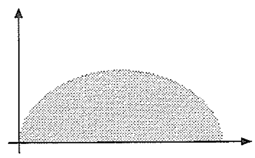
線分 PQ の中点を M とし，点 M から直線 QR に引いた垂線と線分 QR との交点を H とする．点 H は，線分 QR を 1 ： $\boxed{\text{ウ}}$ に内分する点である．点 P の位置に依らず，線分の長さについて

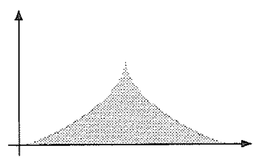
$$\boxed{\text{エ}} \times (\mathrm{MH})^2 + (\mathrm{OM})^2 = 1$$

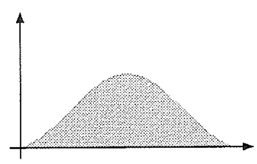
が成り立つ．点 P が点 A から点 B まで移動するとき，線分 MH が通過する領域の概形は $\boxed{\text{オ}}$ であり，面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ である．

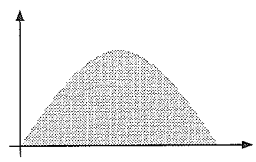
$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

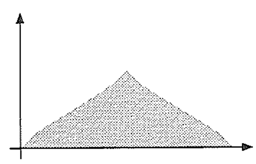
①


②


③


④


⑤


⑥


(b) 点Pが点Aから点Bまで移動するとき，線分QRが通過してできる曲面上において，2点A，Bを結ぶ最も短い曲線は $\boxed{\text{ク}}$ が描く軌跡である．

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

① 点Q　　② 点R

③ 設問(a)で考えた点H　　④ 線分QRと $yz$ 平面との交点

⑤ 線分QRを $1:\sqrt{2}$ に内分する点　　⑥ 線分QRを $\sqrt{2}:1$ に内分する点

⑦ 三角形PQRの重心から線分QRに引いた垂線と線分QRとの交点

(c) 点Pが点Aから点Bまで移動するとき，線分PQを直径とする $xz$ 平面に平行な円が通過してできる球の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ である．

また，三角形PQRの面積は，線分PQを直径とする円の面積の $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\pi}$ 倍である．したがって，立体 $V$ の体積は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である．

(2) $z \geqq 0$ の領域において，$yz$ 平面上の点Tを頂点とし，2点P，Qを通る放物線 $L$ を考える．ただし，Q，Tは下記の2条件を満たす点である．

・点Qは $C$ 上にあり，直線PQは $x$ 軸に平行である．

・三角形PQTは $xz$ 平面に平行であり，点Tの $z$ 座標は線分PQの長さに等しい．

点Pが $(1, 0, 0)$ であるとき，放物線 $L$ を表す式は

$$y=0,\qquad z=\boxed{\text{セソ}}\,x^2+\boxed{\text{タ}},\qquad (\text{ただし}\ -1 \leqq x \leqq 1)$$

であり，この放物線と線分PQで囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

点Pが点Aから点Bまで移動するとき，放物線 $L$ と線分PQで囲まれる図形が通過してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である．