数 学 問 題 紙

令和 6 年 2 月 25 日

自　　11：00

至　　12：40

答 案 作 成 上 の 注 意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 折りこまれている白紙（4 枚）は草案紙として使用すること。
5. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

1 次の各問に答えよ．

(1) x と y を $x > 0$，$y \neq 0$ をみたす実数とする．複素数 $z = x + iy$(ただし i は虚数単位である)が方程式 $z^3 = \overline{z}^2$ の解(ただし $\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す)であるとき，x の値を求めよ．ただし答えは三角関数を用いずに表すこと．

(2) 座標空間における4点 $\mathrm{A}\left(-\frac{7}{3},\ 2,\ -1\right)$，$\mathrm{B}\left(-\frac{5}{3},\ -1,\ 4\right)$，$\mathrm{C}\left(0,\ 2,\ \frac{2}{3}\right)$，$\mathrm{D}(4,\ 5,\ -1)$ に対し，AとBを通る直線を ℓ，CとDを通る直線を m とする．このとき，ℓ と m の交点の座標を求めよ．

(3) 1から1000までの自然数のうち，4，6，10のいずれかで割り切れる数は全部で何個あるか．

$\boxed{2}$ θ を $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする．座標平面上の楕円 E： $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ に対して，直線 $\ell : x\sin\theta - y\cos\theta = 0$ と E との 2 つの交点をそれぞれ A，C とし，直線 $m : x\cos\theta + y\sin\theta = 0$ と E との 2 つの交点をそれぞれ B，D とする．ただし，A の x 座標および B の y 座標は共に正とする．

(1)　2 点 A と B の座標を θ の式で表せ．

以下，四角形 ABCD の面積を S とする．

(2)　S を $\cos 2\theta$ の式で表せ．

(3)　θ が $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，S の最大値と最小値を求めよ．また，S が最大値と最小値をとるときの θ の値もそれぞれ答えよ．

3　1から6までの数字が一つずつ各面に書かれているが，面に書かれている数字を消して元の数字とは別の数字(ただし1から6までの数字)に書き換えることができる六面体のサイコロがある．書き換える際に，どの数字に書き換えられるかは同様に確からしいものとする．数字を書き換える前(1から6が一つずつ書かれている状態)のサイコロを「前サイコロ」と呼ぶ．一方，一つの面の数字を消して別の数字に書き換えたサイコロを「後サイコロ」と呼ぶ．

(1)「後サイコロ」の面に書かれている数字の合計を S_1 とする(例えば，「前サイコロ」の「4」の面の数字が「1」に書き換えられた場合，$S_1 = 1 + 2 + 3 + 1 + 5 + 6 = 18$ となる)．このとき $S_1 > 18$ となる確率を求めよ．

(2)「前サイコロ」を二つ用意し，それぞれの「後サイコロ」を作成する．二つの後サイコロの面に書かれている数字の合計を S_2 とする(例えば，一つ目の「前サイコロ」の「4」の面の数字が「1」に書き換えられ，二つ目の「前サイコロ」の「3」の面の数字が「2」に書き換えられた場合，$S_2 = (1 + 2 + 3 + 1 + 5 + 6) + (1 + 2 + 2 + 4 + 5 + 6) = 38$ となる)．このとき $S_2 = 36$ となる確率を求めよ．

4 $f(x)=\sqrt{x+2}$ とする．関数 $y=f(x)$ のグラフを C_1，その逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフを C_2 とする．

(1) $f^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ．

(3) C_1，C_2 および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(4) 直線 $y=x$，C_2 および y 軸で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．