数 学 問 題 紙

令和５年２月25日

自　　11：20

至　　13：00

答案作成上の注意

1. 数学の問題紙は１から５までの５ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの４枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 折りこまれている白紙（４枚）は草案紙として使用すること。
5. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

1 次の各問に答えよ.

(1) $\vec{a}=(3,\ -1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 2,\ 1)$とする. tをすべての実数とするとき$|\vec{a}+t\vec{b}|$の最小値を求めよ.

(2) 不等式

$$8\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-3\log_8 x^9<5$$

をみたすxの範囲を求めよ.

(3) $\sqrt{23}$の整数部分をn_0, $\left(\sqrt{23}-n_0\right)^{-1}$の整数部分を$n_1$, $\left\{\left(\sqrt{23}-n_0\right)^{-1}-n_1\right\}^{-1}$の整数部分を$n_2$とする. このとき$n_0+(n_1+n_2{}^{-1})^{-1}$を求めよ.

$\boxed{2}$ 次の各問に答えよ.

(1) 同一直線上にない平面上の相異なる任意の3つの点X, Y, Zに対して, $\angle$YXZの二等分線はベクトル $\dfrac{1}{|\overrightarrow{XY}|}\overrightarrow{XY}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{XZ}|}\overrightarrow{XZ}$ と平行であることを示せ.

平面上の OA = 2, OB = 3, AB = 4 である三角形OABの内接円の中心をIとする.

(2) $\overrightarrow{OI}$ を, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.

$\angle$OABの外角の二等分線と直線OIの交点をJとする.

(3) $\overrightarrow{OJ}$ を, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.

(4) Iから直線OAに下ろした垂線をIHとするとき, IHの長さを求めよ.

(5) Jから直線ABに下ろした垂線をJKとするとき, JKの長さを求めよ.

3 確率 p でシュートを成功させる選手がいる．ある試合中に，この選手は3回のシュートを試みた．

(1) この選手が3回目で初めてシュートを成功させた確率を，p を用いて表せ．

この選手の親は試合を観戦できなかったが，「3回のシュートのうち少なくとも1回のシュートを成功させた」という事象 A が起こったことを知った．この事象 A が起こったときに，この選手が3回目で初めてシュートを成功させる条件付き確率は $\dfrac{25}{109}$ であるという．

(2) p の値を求めよ．

(3) 事象 A が起こったときに，この選手が2回目で初めてシュートを成功させる条件付き確率を求めよ．

4 nを2以上の自然数とする．$x > 0$において関数$f_n(x)$を，

$$f_n(x) = x^{n-1} e^{-x}$$

と定義する．また，関数$f_n(x)$の最大値をm_nとする．

(1) m_nをnを用いて表せ．

(2) $x > 0$であるとき，$xf_n(x) \leqq m_{n+1}$が成り立つことを利用して，極限値$\lim\limits_{x \to \infty} f_n(x)$を求めよ．

aを正の実数とするとき，xに関する方程式

$$x = ae^x \qquad \cdots\cdots①$$

を考える．

(3) 方程式①における正の実数解の個数を調べよ．

以下，方程式①が，相異なる2つの正の実数解α，βを持ち，$\beta - \alpha = \log 2$をみたす場合を考える．

(4) α，β，aを求めよ．

(5) xy平面上において$y = f_2(x)$と$y = a$で囲まれた領域の面積を求めよ．