

数学問題紙

令和4年2月25日

自 11:20

至 13:00

答案作成上の注意

1. 数学の問題紙は1から5までの5ページである。
2. 解答用紙は③から⑥までの4枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 折りこまれている白紙(4枚)は草案紙として使用すること。
5. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

1 次の問いに答えよ.

(1) i は虚数単位である. 複素数平面上で, 方程式 $|z + 3i| = 2|z|$ を満たす図形と方程式 $|z - 4i| = |z|$ を満たす図形の共有点を表す複素数をすべて求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n}\right)}$$

であるとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n$ を求めよ. ただし, 対数は自然対数とする.

(3) 関数 $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ ($x > 0$) に対して

$$f_1(x) = f(x), \quad f_n(x) = (f \circ f_{n-1})(x) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

とおく. 次の(i), (ii)に答えよ.

(i) $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ を求めよ.

(ii) 自然数 n に対して $f_n(x)$ の式を推測し, その結果を数学的帰納法を用いて証明せよ.

2

原点を O とする座標空間に、4 点

$A(1, 2, 1)$, $B(2, -1, -3)$, $C(1, 1, 1)$, $D(3, 2, -1)$ がある。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 三角形 OAB の面積を求めよ。

(2) 2 点 O , A を通る直線を L_1 、2 点 O , B を通る直線を L_2 とする。直線 L_1 上に点 E 、直線 L_2 上に点 F をとる。ここで、点 E と点 F は異なるとする。いま、 \vec{EF} と \vec{OC} は垂直で、2 点 E , F を通る直線 L_3 が点 D を通るとする。次の(i), (ii)に答えよ。

(i) 直線 L_3 と xy 平面との交点の座標を求めよ。

(ii) 点 B と直線 L_3 上の点との距離の最小値を求めよ。

3 n は 5 以上の自然数とする. 赤玉 3 個と白玉 7 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し, 色を確認してからもとに戻すという試行を n 回行う. 以下の問いに答えよ.

- (1) n 回目に 3 度目の赤玉が出る確率を求めよ.
- (2) 赤玉が 2 度以上連続することなくちょうど 3 度出る確率を求めよ.
- (3) n 回目に 3 度目の赤玉が出たとき, 赤玉が 2 度以上連続することなく 3 度出ている条件付き確率を求めよ.

4 次の問いに答えよ。ただし、 $3.14 < \pi < 3.15$ を用いてもよい。

(1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、 D_1 を曲線 $y = \sin x$ と直線 $y = \frac{2}{\pi}x$ で囲まれた図形とし、 D_2 を曲線 $y = \sin x$ と 2 直線 $y = x$, $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形とする。次の(i), (ii)に答えよ。

(i) D_1 , D_2 の面積をそれぞれ求め、どちらの面積が大きいか調べよ。

(ii) D_1 を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

