令和６年度一般選抜前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は，４ページあります。
3. 解答用紙は４枚，草案紙は１枚あります。
4. 受験番号は，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙，草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1　K を正の実数とし，

$$f(x)=\log\left(1+\frac{x^2}{K^2}\right)$$

とする．ただし，$\log x$ $(x>0)$ は自然対数を表す．また，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の y 座標を b として，

$$g(x)=b-\sqrt{b^2-x^2}$$

とする．曲線 $y=g(x)$ は，円 $x^2+(y-b)^2=b^2$ の下半円である．

$H(x)=f(x)-g(x)$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，自然対数の底 e について，必要ならば $2<e<3$ を用いてもよい．

問 1　b の値を求めよ．

問 2　$K=1$ とするとき，$H(x)$ が $x=0$ において極大値をとるか，極小値をとるかを判定せよ．

問 3　$|x|\leqq b$ において，K の値により，次の (A)，(B)，(C) のいずれかが成り立つ．

(A)　$H(x)\geqq 0$ である

(B)　$H(x)$ は正の値も負の値もとる

(C)　$H(x)\leqq 0$ である

(A)，(B)，(C) のそれぞれが成り立つときの K の値の範囲を求めよ．

問題 2　$p>1$ とし，$x>0$ の自然対数 $\log x$ と x^p の商として定義される関数

$$f(x)=\frac{\log x}{x^p}$$

を考える．自然対数の底を e として，次の問いに答えよ．

問 1　次の極限を調べよ．必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を用いてもよい．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$

問 2　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，変曲点は求めなくてよい．また，n を正の整数とするとき，$x\geqq\dfrac{1}{e^n}$ において，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ．

問 3　座標平面の原点を通る直線 l が曲線 $y=f(x)$ と点 $(a, f(a))$ で接しているとき，a を p を用いて表せ．また，l の傾き m を p を用いて表せ．

問 4　曲線 $y=f(x)$ と直線 l および x 軸で囲まれた図形の面積を S とするとき，$(p-1)^2S$ を求めよ．

問題 3　座標平面において 2 点 A $(-1, 1)$, B $(1, -1)$ および曲線 $xy = 1$ $(x > 0)$ 上を動く点 P $\left(p, \dfrac{1}{p}\right)$ がある．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　$\triangle$ABP の面積 S を p を用いて表し，S のとりうる値の範囲を求めよ．

問 2　$\triangle$ABP の外接円の半径 r を S を用いて表せ．

問 3　$\triangle$ABP の外接円の面積を T とし，$\dfrac{T}{S^2}$ を p の関数とみて，これを $f(p)$ とする．

(1)　$\displaystyle\lim_{p \to \infty} f(p)$ を求めよ．

(2)　$f(p)$ の最大値，最小値，およびそのときの p の値をそれぞれ求めよ．

問題 4　1，2，3の数字が書かれたカードが1枚ずつ1つの箱に入っている．その箱からカードを1枚取り出し，数字を確認した後，箱に戻すという試行を繰り返す．n を正の整数とし，n 回の試行後にそれまでに取り出したカードの数字の和が初めて3の倍数になる確率を p_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　p_1，p_2，p_3 を求めよ．

問 2　p_n を求めよ．

問 3　N を正の整数として $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^2 p_n$ を求めよ．

問 4　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n$ の和を求めよ．ただし，必要ならば $|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$ が成り立つことを用いてもよい．