令和５年度一般選抜前期日程

数　学　問　題　紙

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は，４ページあります。
3. 解答用紙は４枚，草案紙は１枚あります。
4. 受験番号は，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙，草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1　k を正の実数とし，原点を O とする座標平面上で媒介変数 t を用いて

$$x=f(t)=e^{kt}\cos t,\qquad y=g(t)=e^{kt}\sin t$$

と表される曲線 C を考える．曲線 C 上の点 P の座標を (a, b) とし，$ka \neq b$ を満たすものとする．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　点 P (a, b) における接線 ℓ の傾きを a，b，k を用いて表せ．

問 2　問 1 で求めた接線 ℓ 上に点 P と異なる任意の点 Q (x, y) をとる．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とのなす角を θ とするとき，$|\cos\theta|$ を k を用いて表せ．

問 3　$\tan\alpha=k\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．関数 $f(t)$ は $\alpha \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で減少関数であることを示せ．

問 4　α を問 3 で定めた数とし，$x_1=f(\beta)\ \left(\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．このとき，x 軸，y 軸，直線 $x=x_1$，および曲線 C の $\beta \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分によって囲まれる図形の面積を求めよ．

問題 2　a, b を実数とする．x に関する 3 次方程式

$$(*) \qquad x^3 - 3ax + b = 0$$

は虚数解をもち，3 個の解は複素数平面上で一直線上にないものとする．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　(1)　a, b の満たす条件を示し，それを ab 平面上に図示せよ．

(2)　方程式 $(*)$ の実数解を c とするとき，虚数解を a, c および虚数単位 i を用いて表せ．

問 2　複素数平面上で方程式 $(*)$ の 3 個の解を頂点とする三角形を K とする．

(1)　K が点 1 を中心とする半径 2 の円 $|z-1|=2$ に内接しているとき，a と b の値を求めよ．

(2)　K が点 1 を中心とする半径 r の円に内接しているとき，K の 3 つの頂点を表す複素数と半径 r を a を用いてそれぞれ表し，a のとりうる値の範囲を求めよ．

問題 3　四面体 ABCD において，$AB=4$，$BC=6$，$\angle ABC=\angle BCD=60^\circ$ とする．辺 AC を $AL:LC=1:6$ に内分する点 L をとり，点 A から辺 BC に垂線を下ろし，辺 BC との交点を M とする．AM と BL との交点を P とするとき，次の各問いに答えよ．

問 1　辺 AC の長さ，および内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の値を求めよ．

問 2　$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

問 3　三角形 ABC を含む平面を α とする．点 D から平面 α に下ろした垂線と平面 α との交点は P に一致する．

(1)　PD の長さを求めよ．

(2)　PD 上に $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{PD}$ となる点 Q をとる．$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ のとき，k の値と四面体 QABC の体積を求めよ．ただし，$0<k<1$ とする．

問題 4　投げたときに表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨がある．この硬貨を繰り返し投げ，3 回連続して同じ面が出るまで続けるゲームをする．n を自然数とし，n 回目，$n+1$ 回目，$n+2$ 回目に 3 回連続して表が出てゲームが終了するときの場合の数を a_n とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 をそれぞれ求めよ．求める過程も示せ．

問 2　$F_1=1$，$F_2=1$，$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定められた数列 $\{F_n\}$ の一般項は，$F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ で与えられる．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}$ の和を求めよ．

問 3　n 回目，$n+1$ 回目，$n+2$ 回目に 3 回連続して表が出てゲームが終了する確率を P_n とおく．問 2 の結果を用いて，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P_n$ の和を求めよ．