令和４年度一般選抜前期日程

数　学　問　題　紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は，６ページあります。
3. 解答用紙は４枚，草案紙は１枚あります。
4. 受験番号は，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙，草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1　$\triangle$OAB において，3 辺の長さをそれぞれ $\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ とし，辺 AB を $\mathrm{AL}:\mathrm{LB}=1:2$ と内分する点を L とする．辺 OA 上に $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 P，辺 OB 上に $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 Q をとる．P と Q は $\angle\mathrm{PLQ}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たすように動き，AQ と BP との交点を R とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，$0<m<1$，$0<n<1$ とする．

問 1　$m+n$ の値は一定であることを示し，その値を求めよ．

問 2　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および m を用いて表せ．

問 3　$\triangle$PRQ の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ．

問題 2　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で連続な関数 $f(x)$ について，数列 $\{g_n\}$ を

$$g_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}} f(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

と定める．次の各問いに答えよ．ただし，a，b，c，p，q，α，β は 0 でない定数とし，e は自然対数の底である．

問 1　$f(x) = ax^2 + bx + c$ のとき，g_n を求めよ．

問 2　$f(x) = e^{\alpha x}$ のとき，g_n を求めよ．

問 3　$I = \int_0^1 f(x)\,dx$ とおく．このとき，$f(x) = pe^{\alpha x} + qe^{\beta x} + ax^2 + bx + c$ について，$\lim_{n \to \infty} g_n$ を I を用いて表せ．

問題 3　1から30までの自然数について，次の各問いに答えよ．

問 1　この30個の自然数のうち，次の数はいくつあるか．

(1)　4の倍数または6の倍数

(2)　2の倍数であるが4でも6でも割り切れない数

問 2　この30個の自然数から互いに異なる2数を選ぶとき，次の選び方は何通りあるか．

(1)　少なくとも一方の数が12の倍数となる選び方

(2)　2つの数の積が12の倍数となる選び方

問題 4　a, b は正の実数で $a>b$ とし，α は $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$ を満たす角とする．ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ とする．このとき，次の問 1 と問 2 に答えよ．6 ページ目に図 1 と図 2 がある．

問 1　座標平面上に原点 O を中心とし，半径が a で中心角は $\dfrac{\pi}{2}$ より小さい扇形 BOA がある．ただし，点 A の座標は $(a, 0)$ であり，点 B は第 1 象限にある．この扇形を y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍に縮小した図形を COA で表す．ここで点 C は，点 B の座標を (x_0, y_0) としたときに座標が $\left(x_0, \dfrac{b}{a}y_0\right)$ となる点であり，$\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{4}$ とする．図形 COA は図 1 の灰色部分である．

(1)　扇形 BOA の中心角 $\angle\mathrm{BOA}$ を α を用いて表せ．

(2)　図形 COA の面積を a, b, α を用いて表せ．

(3)　図形 COA を楕円 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ によって 2 つの図形に分けたとき，原点 O を含む方の図形の面積を m，点 A を含む方の図形の面積を n とする．m と n を a, b, α を用いてそれぞれ表せ．

問 2　座標平面上で次の不等式の表す 4 つの領域を考える.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ の表す領域を U_0,　　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\geqq 1$ の表す領域を U_1

$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\leqq 1$ の表す領域を V_0,　　$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\geqq 1$ の表す領域を V_1

とする. さらに $S=U_0\cap V_0$, $T=(U_0\cap V_1)\cup(U_1\cap V_0)$ の面積をそれぞれ s, t とする. 図 2 において, 灰色部分が領域 S, 4 つの斜線部分が領域 T である.

(1)　$s=t$ となるときの a の値を求めよ.

(2)　a, b が $a^2+b^2=1$ を満たしながら変化するとき, $S\cup T$ の面積が最大となる a の値を a_0 とする. $a=a_0$ のとき, s と t の大小を比較せよ.

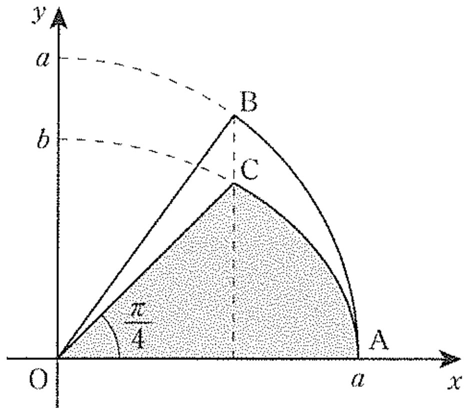

図 1

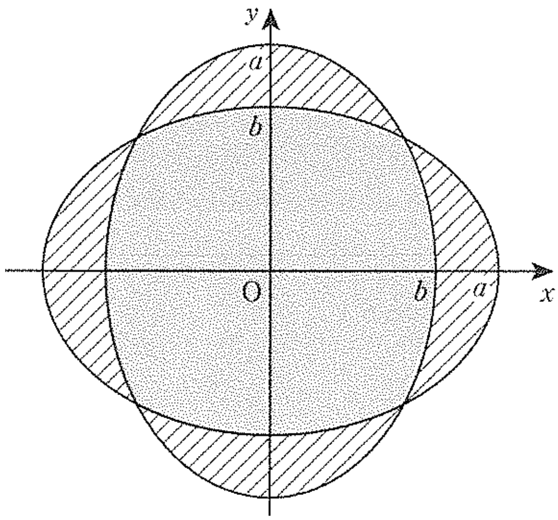

図 2