令和５年度 入学試験問題

数学（前期）

試験時間	９０分
問題冊子	１～８頁

注意事項

1. 指示があるまで問題冊子は開かないこと。
2. 問題冊子および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. スマートフォン等の電子機器類は電源を必ず切り，鞄の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題冊子および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題冊子の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題冊子および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返し，問題冊子は持ち帰ること。

受験番号		氏名	

［Ｉ］ k を実数の定数とする。1 から 6 の目をもつ大小 2 つのさいころを同時に 1 回投げて出た目をそれぞれ a，b とするとき，2 次関数 $f_k(x)$ を

$$f_k(x) = \frac{a}{2}x^2 + (a+b-k)\,x - \frac{b}{2}$$

と定める。O を原点とする xy 平面における放物線 $C : y = f_k(x)$ と x 軸との交点を x 座標の値が小さい順に P，Q とし，C と y 軸との交点を R とする。このとき，△PQR が直角三角形となる確率を $P_0(k)$，直角二等辺三角形となる確率を $P_1(k)$，正三角形となる確率を $P_2(k)$ として，以下の各問いの空欄に適する数値を求めよ。

問 1　確率 $P_0(k)$ は k の値によらずに $P_0(k) = \boxed{\text{ア}}$ となる。

問 2　$P_1(k) \neq 0$ となるような k の値を求めると $k = \boxed{\text{イ}}$，または $\boxed{\text{ウ}}$（ただし，$\boxed{\text{イ}} < \boxed{\text{ウ}}$）となる。このとき，$P_1(\boxed{\text{イ}}) = \boxed{\text{エ}}$，$P_1(\boxed{\text{ウ}}) = \boxed{\text{オ}}$ となる。

問 3　$P_2(k) \neq 0$ となるような k の値を求めると $k = \boxed{\text{カ}}$，または $\boxed{\text{キ}}$（ただし，$\boxed{\text{カ}} < \boxed{\text{キ}}$）となる。このとき，$P_2(\boxed{\text{カ}}) = \boxed{\text{ク}}$，$P_2(\boxed{\text{キ}}) = \boxed{\text{ケ}}$ となる。

（計 算 用 紙）

［II］ O を原点とする xyz 空間において，次の 2 つの球面 S_1，S_2 が与えられている。

$$S_1 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1,$$

$$S_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$$

S_1 と S_2 の交わりの図形を E とし，E を含む平面 π と xy 平面との交線を l とする。xy 平面において，l を y 軸に関して対称移動して得られる直線を m とする。l と m の交点を A，m と x 軸の交点を B，l と x 軸の交点を C とし，E 上の点を P として四面体 PABC を考えるとき，以下の各問いに答えよ。問 4 については導出過程も記せ。

問 1 π の方程式を x，y，z を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2 xy 平面内における l の方程式を x，y を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3 xy 平面内における m の方程式を x，y を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4 四面体 PABC の体積 V の最小値を求めよ。また，そのときの P の座標を求めよ。

（計 算 用 紙）

[III] $n=1,2,3,\cdots$ に対して，$\left(\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+1\right)^{n+2}$ の展開式の x^3 の係数を A_n とするとき，以下の問 1〜問 3 の空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。問 4 については導出過程も記せ。

問 1　$A_n=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\left(n+\boxed{\text{ウ}}\right)\left(n+\boxed{\text{エ}}\right)\left(n+\boxed{\text{オ}}\right)$（ただし，$\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}<\boxed{\text{オ}}$）である。

問 2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

問 3　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

問 4　問 1 で求めた A_n に関して $a_n=n+\boxed{\text{ウ}}$，$b_n=n+\boxed{\text{エ}}$，$c_n=n+\boxed{\text{オ}}$ とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\frac{(a_n+b_n+c_n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

を求めよ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ を証明なしに用いてよい。

（計 算 用 紙）

[IV] O を原点とする xyz 空間において，xy 平面 (平面 $z=0$) 内の曲線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t, t^2, 0)$ (ただし，$0<t<1$) における C の接線 l と直線 $x=1$ との交点を Q とする。また，$\mathrm{A}(1,0,0)$，$\mathrm{B}(1,1,0)$，$\mathrm{R}(t, t^2, t-t^2)$ (ただし，$0<t<1$) とする。t が $0<t<1$ を満たしながら動くとき三角形 PQR が通過してできる立体に，線分 OA と点 B を付け加えた立体を K とし，その体積を V とおく。$0 \leqq a \leqq 1$ を満たす a に対して，K と平面 $x=a$ の共通部分からなる平面図形 $K(a)$ の面積を $S(a)$ とおく。ただし，1 点あるいは線分の面積は 0 とみなして考える。このとき，以下の各問いに答えよ。問 3〜問 5 については導出過程も記せ。

問 1 xy 平面内における接線 l の方程式を x，y，t を用いて表せ。また，Q の座標を $\mathrm{Q}(1, \boxed{\text{ア}}, 0)$ と表すとき，$\boxed{\text{ア}}$ に入る適切な式を t を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2 xy 平面 (平面 $z=0$) 内の点 $(a, b, 0)$ を $0<a<1$，かつ $0<b \leqq a^2$ を満たすようにとる。このとき，点 $(a, b, 0)$ が線分 PQ 上の点となるように $t=t_{a,b}$ $(0<t<1)$ の値を定め，$t_{a,b}$ を a と b を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3 $0 \leqq a \leqq 1$ を満たす a に対して，平面図形 $K(a)$ が，次の 1 つの等式と 2 つの不等式

$$x=a, \quad 0 \leqq y \leqq a^2, \quad 0 \leqq z \leqq \boxed{\text{イ}}$$

により表される平面図形と一致するように，$\boxed{\text{イ}}$ に入る適切な式を y と a を用いて表せ。

問 4 $S(a)$ を求めよ。

問 5 V を求めよ。

(計 算 用 紙)