令和４年度入学試験問題

数　　学（理，医，歯，工学部）

注　意　事　項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で６ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

　別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された２箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科，選抜方法により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部（学科，選抜方法）	解答すべき問題（○印）						解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5	6		
理学部（理数重点選抜）及び工学部	○	○	○	○	○		５枚	120 分
理学部（野外科学志向選抜）及び医学部（保健学科）	○	○	○	○			４枚	90 分
医学部（医学科）			○	○	○	○	４枚	90 分
歯学部		○	○	○	○		４枚	90 分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 座標平面の原点を O とし，2 点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，$B\left(0, \frac{3}{4}\right)$ をとり，単位円周上に点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ をとる。ただし，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin\frac{\pi}{12}$，$\cos\frac{\pi}{12}$，$\sin\frac{5\pi}{12}$，$\cos\frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 四角形 OAPB の面積 S を θ を用いて表せ。

(3) $\frac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{12}$ のとき，S の最大値と最小値を求めよ。

2

座標空間の原点を O とし，3 点 $A(2, 2, -2)$，$B(2, -2, 2)$，$C(-2, 2, 2)$ をとる。線分 AB を 3 : 1 に内分する点を D，線分 AC を 3 : 1 に外分する点を E とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 点 D，E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし，$\overrightarrow{OF}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角 θ が $\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき，点 F の座標を求めよ。

3

式 A, B, C を次のように定める。

$$A = y^2 - 3x^2y + 11xy + 4y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5$$
$$B = y^2 + x^2y - 5xy + 4y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5$$
$$C = y + x - 1$$

次の問いに答えよ。

(1) 式 A, B, C を y の整式とみて，A, B を C で割ったときの商をそれぞれ求めよ。

(2) 不等式 $\log A > \log(-B)$ が表す領域を xy 平面上に図示せよ。

4 曲線 C を $y = x^2 e^x$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) $\displaystyle\int xe^x dx$, $\displaystyle\int x^2 e^x dx$ をそれぞれ求めよ。

(3) 点 $(t, 0)$ を通る曲線 C の接線がちょうど 2 本存在するような t の値をすべて求めよ。

(4) (3) で求めた t のうち $-1 < t < 0$ を満たすものを T とする。点 $(T, 0)$ を通る 2 本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

5 複素数 z に対して，その共役複素数を $\overline{z}$ とし，i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。

$$z\overline{z} + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha}$$

ただし，α は複素数とする。

(2) 以下を満たす複素数 z が存在するような複素数 β の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$$z\overline{z} + (1 - i + \overline{\beta})z + (1 + i + \beta)\overline{z} = \beta$$

(3) $|\beta| \leqq 2$ とする。複素数 z が以下を満たすとき，$|z|$ の最大値を求めよ。また，そのときの β，z を求めよ。

$$z\overline{z} + (1 - i + \overline{\beta})z + (1 + i + \beta)\overline{z} = \beta$$

6

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。関数 $f(x)=x^2$ とし，$a_1=10$ とする。曲線 $y=f(x)$ の点 $(a_n, f(a_n))$ における法線と曲線 $y=f(x)$ との 2 つの交点を $(a_n, f(a_n))$，$(-a_{n+1}, f(-a_{n+1}))$ とする。次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) すべての $n \geqq 1$ に対して

$$\left| a_n - \sqrt{n+99} \right| \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。