令和３年度入学試験問題

数　　　学（理，医，歯，工学部）

注　意　事　項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で６ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された２箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科，選抜方法により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部（学科，選抜方法）	解答すべき問題（○印）						解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5	6		
理学部（理数重点選抜）及び工学部	○	○	○	○	○		5枚	120分
理学部（野外科学志向選抜）及び医学部（保健学科）	○	○	○	○			4枚	90分
医学部（医学科）			○	○	○	○	4枚	90分
歯学部		○	○	○	○		4枚	90分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 正四面体 OABC において三角形 ABC の重心を D，線分 AB を 2 : 1 に内分する点を E，線分 AC を 5 : 2 に外分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 点 G は点 E を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線上にある。点 H は点 F を通り $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に平行な直線上にある。3 点 D，G，H が一直線上にあるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(4) (3) で求めた $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に対して，$\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|^2}$ を求めよ。

2 座標平面上の 2 点 A$(0,-1)$，B$(1,2)$ を通る直線を ℓ とする。また，中心 $(3,-2)$，半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) ℓ と C は共有点を持たないことを示せ。

(3) 点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。T はどのような図形になるか答えよ。

(4) (3) で求めた図形 T 上の点 (x,y) に対して $\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

3

平面上に正五角形 ABCDE があり，頂点 A, B, C, D, E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり，$n=6$ ならば点 P は頂点 B の位置にある。次の問いに答えよ。

(1) さいころを 2 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率および点 P が頂点 B の位置にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。

(3) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 B の位置にある確率を b_k とする。b_{k+1} を b_k を用いて表せ。

(4) (3) で与えた b_k に対して，$f_k=6^k b_k$ とおく。数列 $\{f_k\}$ と $\{b_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

4 実数 a と b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + \cos x + 2\cos\frac{x}{2}$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(3) $f(x)$ が

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = 4 + \pi,$$
$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx = \frac{4}{3}(4 + \pi)$$

を満たすとき，a と b の値を求めよ。

(4) (3) で求めた a と b で定まる $f(x)$ に対して，$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

5

複素数平面上の原点を中心とする単位円周上の 4 点 z_1，z_2，z_3，z_4 は

$$\arg\frac{z_2}{z_1}=\theta_1>0,\quad \arg\frac{z_3}{z_2}=\theta_2>0,\quad \arg\frac{z_4}{z_3}=\theta_3>0,$$

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3<2\pi$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $|z_2-z_1|$ を θ_1 を用いて表せ。

(2) $|z_3-z_1|$，$|z_4-z_1|$ を θ_1，θ_2，θ_3 を用いて表せ。

(3) $\dfrac{|z_4-z_1||z_2-z_1|+|z_3-z_2||z_4-z_3|}{|z_2-z_1||z_3-z_2|+|z_4-z_3||z_4-z_1|}=\dfrac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}$ を示せ。

6 $a \geqq 0$ とし，n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき，

$$\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right) < \log\frac{1+a+x}{1+a} < \frac{x}{1+a}$$

を示せ。

(2) $I_n(a) = \left(1+\frac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2(1+a)}\right)$

とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ を求めよ。