令和３年度　数　　学

問題の選択方法

以下に示す問題を解答すること。

学　部	学科等	解答する問題
教育学部	学校教育教員養成課程 （「数Ⅰ・数Ⅱ・数Ａ・数Ｂ」 受験者）	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$
	学校教育教員養成課程 （「数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ」 受験者）	$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$
理学部	理学科　数学受験	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$
医学部	医学科	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$
工学部	工学科　**理型**入試 （社会デザインコースを除く）	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$
	工学科　**文理型**入試 （社会デザインコース）	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$
農学部	全学科	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

注 意 事 項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は，８ページあります。

　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。

4　解答は，すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。

5　問題冊子の余白は下書きに使用してよい。

6　解答用紙はすべて机の上に出しておくこと。机の中に入れてはいけません。

1 （教育学部（「数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B」受験者），工学部工学科文理型入試（社会デザインコース），農学部）

以下の問いに答えよ。

(1) i を虚数単位とする。$(1+\sqrt{3}\,i)^5-\{1+(\sqrt{3}\,i)^5\}$ の実部を求めよ。

(2) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ で，$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\sin\beta=\dfrac{1}{5}$ のとき，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(3) $a>0$ とする。座標空間における3点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 4)$ について，$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ となる a の値を求めよ。

(4) 曲線 $y=x^3-x^2-2x$ と x 軸とで囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ。

(5) 1辺の長さが1の正方形ABCDがある。頂点A，B，C，Dを移動する点Pは，1回の移動で，今いる頂点から他の3つの頂点のいずれかへ移動する。ただし，距離が $\sqrt{2}$ 離れた頂点へ移動する確率は $\dfrac{1}{5}$ で，他の2つの頂点へ移動する確率はそれぞれ $\dfrac{2}{5}$ である。点Pが頂点Aを出発するとき，3回の移動でちょうどAに戻る確率を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{2}$ (教育学部，工学部工学科文理型入試(社会デザインコース)，農学部)

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n は 6 で割ると 5 余るとする。このとき，$n^3 + 1$ は 18 の倍数であることを示せ。

(2) 座標平面において，不等式 $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - 2y - 1) \geqq 0$ の表す領域を図示せよ。

(3) 等式 $|x| + |1 - 2x| = 3$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

(4) 導関数の定義にしたがって，関数 $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x}{2}$ の導関数を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

3 (教育学部，工学部工学科文理型入試(社会デザインコース)，農学部)

以下の問いに答えよ。

(1) a，bを正の定数とし，座標平面上の2点A，Bの座標を，それぞれ$(a, 0)$，$(0, b)$とする。線分AB上のA，Bとは異なる点$P(x, y)$を考える(図1)。座標が(x, y)，$(0, y)$，$(0, 0)$，$(x, 0)$である4点を頂点とする長方形の面積をSとする。

(i) Sをa，b，xを用いて表せ。

(ii) Sが最大となるときの点Pの座標，および，そのときのSをa，bを用いて表せ。

(2) 座標平面上の2点P_0，Qの座標を，それぞれ$(1, 0)$，$(0, 3)$とする。点P_1，P_2，P_3，…，P_n，…，および，実数S_1，S_2，S_3，…，S_n，… を次のように順に定める。

自然数nに対し，点P_{n-1}が定められたとき，P_{n-1}の座標を(x_{n-1}, y_{n-1})とする。線分$P_{n-1}Q$上のP_{n-1}，Qとは異なる点$P(x, y)$を考える。座標が(x, y)，$(0, y)$，$(0, y_{n-1})$，(x, y_{n-1})である4点を頂点とする長方形の面積が最大となるときの点PをP_nとし，そのときの面積をS_nとする。

(i) S_1，S_2を求めよ。

(ii) 数列$\{S_n\}$の一般項を求めよ。

(iii) $S_1 + S_2 + \cdots + S_n$をnを用いて表せ。

(iv) $S_1 + S_2 + \cdots + S_n > 1 - 10^{-11}$となる最小の$n$を求めよ。ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$を用いてよい。

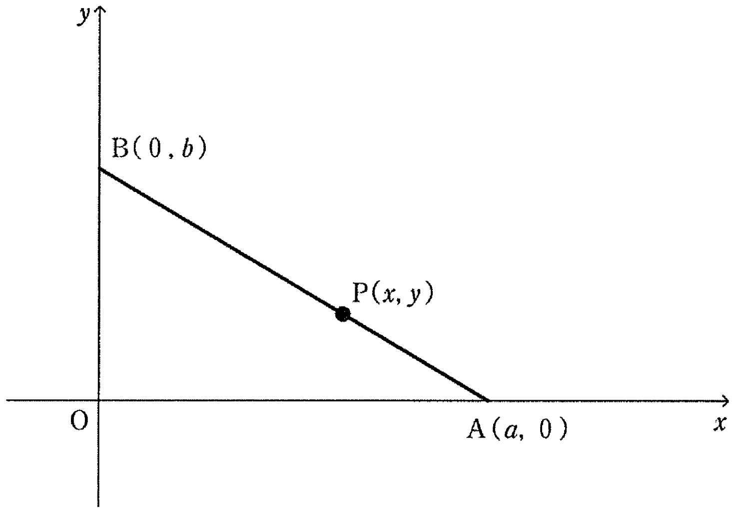

図 1

数学の試験問題は次に続く。

4 （教育学部（「数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B」受験者），理学部，医学部，工学部工学科理型入試（社会デザインコースを除く））

以下の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^e (3x^2+2x)\log x\,dx$ を求めよ。

(3) 2つの曲線 $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$，$y=x^2-1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(4) i を虚数単位とし，$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{14}+i\sin\dfrac{\pi}{14}$ とする。$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 27$ のうち，$(\alpha^k)^8=1$ となる k をすべて求めよ。

(5) 100未満の正の整数全体の集合を全体集合 U とし，

$$A=\{n\mid n\in U,\ n\text{ は 3 で割ると 1 余る整数}\}$$
$$B=\{n\mid n\in U,\ n\text{ は偶数}\}$$

とする。このとき，集合 $A\cup\overline{B}$ の要素の個数を求めよ。ただし，$\overline{B}$ は U に関する B の補集合とする。

(6) 1辺の長さが1の正方形ABCDがある。頂点A，B，C，Dを移動する点Pは，1回の移動で，今いる頂点から他の3つの頂点のいずれかへ移動する。ただし，距離が $\sqrt{2}$ 離れた頂点へ移動する確率は $\dfrac{1}{5}$ で，他の2つの頂点へ移動する確率はそれぞれ $\dfrac{2}{5}$ である。点Pが頂点Aを出発するとき，3回の移動でちょうどAに戻る確率を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

5 （理学部，医学部，工学部工学科理型入試（社会デザインコースを除く））

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n は 6 で割ると 5 余るとする。このとき，$n^3 + 1$ は 18 の倍数であることを示せ。

(2) 座標平面において，不等式 $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - 2y - 1) \geqq 0$ の表す領域を図示せよ。

(3) p を実数の定数とし，次の式で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = pa_n + 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。さらに，この数列が収束するような p の値の範囲を求めよ。

(4) $x > 0$ のとき，$6 \log x \leqq 2x^3 - 9x^2 + 18x - 11$ が成り立つことを示せ。

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{6}$ (理学部，医学部，工学部工学科理型入試(社会デザインコースを除く))

四面体 OABC は，

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1, \qquad 0<\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{ABO}<\frac{\pi}{2}$$

を満たすとする(図 2)。以下では，$x=\sin\dfrac{\angle\mathrm{BOC}}{2}$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 次の $\boxed{}$ に適する値を x を用いて表せ。解答は解答用紙の指定のところに記入せよ。

(i) 辺 BC の長さは $\boxed{\text{ア}}$ であり，$\cos\angle\mathrm{BOC}=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(ii) 内積について，$\vec{b}\cdot\vec{c}=$ $\boxed{\text{ウ}}$ ，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $\boxed{\text{エ}}$ ，$\vec{a}\cdot\vec{c}=$ $\boxed{\text{オ}}$ である。

(2) s を $0<s<1$ を満たす実数とする。辺 BC を $s:(1-s)$ に内分する点を P とし，A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OP の交点を H とする。

(i) 線分 OP の長さを s と x を用いて表せ。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる実数 k を s と x を用いて表せ。

(iii) $s=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ。

(3) 四面体 OABC の体積を V とする。

(i) V を x を用いて表せ。

(ii) $\angle\mathrm{BOC}$ が $0<\angle\mathrm{BOC}<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，V の最大値を求めよ。また，V が最大となるとき，平面 OBC と平面 ABC のなす角 α を求めよ。ただし，$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

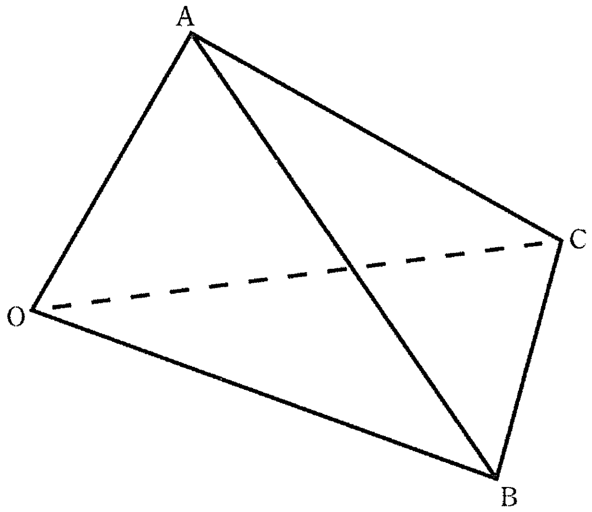

図 2