令和５年度入学試験問題

数　　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，
数学Ａ，数学Ｂ

令和５年２月25日
自　9時00分
至11時30分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学Ａ，数学Ｂ（数列，ベクトル）の問題が**5問**あります。総ページは**13ページ**で，問題は４ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は**5枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

7　この問題冊子の裏表紙には，試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空　白

空　白

〔１〕 箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし，N は 4 以上の自然数である。「この箱からカードを 1 枚取り出し，書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える。この試行を 4 回繰り返し，カードに書かれた番号を順に X，Y，Z，W とする。次の問いに答えよ。

(1) $X = Y = Z = W$ となる確率を求めよ。

(2) X，Y，Z，W が四つの異なる番号からなる確率を求めよ。

(3) X，Y，Z，W のうち三つが同じ番号で残り一つが他と異なる番号である確率を求めよ。

(4) X，Y，Z，W が三つの異なる番号からなる確率を求めよ。

空　白

〔２〕　原点を O とする座標平面上の 2 点 $A(3,0)$，$B(1,1)$ を考える。α，β を実数とし，点 $P(\alpha,\beta)$ は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないとする。直線 OA に関して点 P と対称な点を Q とし，直線 OB に関して点 P と対称な点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 Q および点 R の座標を，α，β を用いて表せ。

(2) 直線 OA と直線 QR が交点 S をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 S の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(3) 直線 OB と直線 QR が交点 T をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 T の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(4) α，β は (2) と (3) の両方の条件を満たすとし，S，T は (2)，(3) で定めた点であるとする。このとき，直線 OA と直線 BS が垂直となり，直線 OB と直線 AT が垂直となる α，β の値を求めよ。

空　白

〔3〕 空間内の6点A，B，C，D，E，Fは1辺の長さが1の正八面体の頂点であり，四角形ABCDは正方形であるとする。$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{b} \cdot \vec{d}$，$\vec{b} \cdot \vec{e}$，$\vec{d} \cdot \vec{e}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = p\vec{b} + q\vec{d} + r\vec{e}$ を満たす実数 p，q，r の値を求めよ。

(3) 辺BEを $1:2$ に内分する点をGとする。また，$0 < t < 1$ を満たす実数 t に対し，辺CFを $t:(1-t)$ に内分する点をHとする。t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，△AGHの面積が最小となる t の値とそのときの△AGHの面積を求めよ。

空　白

〔４〕　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \left(\frac{n^6(n+1)}{{a_n}^3}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。また

$$b_n = \log_2 \frac{a_n}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおく。次の問いに答えよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n\log_2 n}{6^{2n}} = 0$ であることを用いてよい。

(1) b_1，b_2 を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 k = 0$ であることを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 a_{2k}$ を求めよ。

空　白

〔 5 〕　関数 $f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい。

(2) s を定数とするとき，次の x についての方程式 $(*)$ の異なる実数解の個数を調べよ。

$$(*) \qquad f(x)=s$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx$ の値を求めよ。

(4) (2) の $(*)$ が実数解をもつ s に対して，(2) の $(*)$ の実数解のうち最大のものから最小のものを引いた差を $g(s)$ とする。ただし，(2) の $(*)$ の実数解が一つだけであるときには $g(s)=0$ とする。関数 $f(x)$ の最大値を α とおくとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{\alpha} g(s)\,ds$ の値を求めよ。

空　白

試験時間中に机の上に置いてよいもの

○　本学受験票

○　大学入学共通テスト受験票

○　配付した問題冊子等

○　黒鉛筆（和歌，格言等が印刷されているものは不可）

○　鉛筆キャップ

○　シャープペンシル

○　消しゴム

○　鉛筆削り（電動式，大型のもの，ナイフ類は不可）

○　時計（辞書，電卓，端末等の機能があるものや，それらの機能の有無が判別しにくいもの，秒針音のするもの，キッチンタイマー，大型のものは不可）

○　眼鏡

○　ハンカチ

○　目薬

○　ティッシュペーパー（袋又は箱から中身だけ取り出したもの）