令和３年度入学試験問題

数　　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，
数学Ａ，数学Ｂ

令和３年２月25日
自　９時00分
至11時30分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学Ａ，数学Ｂ（数列，ベクトル）の問題が**５問**あります（〔１〕～〔５〕）。このうち，〔５〕は選択問題です。総ページは**13ページ**で，問題は４ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は**５枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**２ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

7　この問題冊子の裏表紙には，試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空　白

空　白

〔 1 〕　a を実数とする。関数 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{2a+1}{2}x^2-ax$ が $x=a$ で極大値をとるとき，次の問いに答えよ。

(1) a の満たす条件を求めよ。

(2) 次の不等式を解け。

$$|x+1|+|x-2| \leqq 4$$

(3) x が (2) の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

空　白

〔２〕　座標平面において，二つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}\,x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点 $\mathrm{A}(1, 1)$，点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は垂直であるとする。このとき，B の座標を求めよ。

(2) 放物線 $y = -\sqrt{2}\,x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直であるとする。このとき，D の座標を求めよ。

(3) B，D はそれぞれ(1)，(2)で定めたものとする。このとき，四角形 ABCD が正方形であることを示せ。

空　白

〔3〕 1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b，3 回目に出た目の数を c とする。また，

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ。

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ確率を求めよ。

(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき，$f'(1) = 7$ である条件付き確率を求めよ。

(4) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき，少なくとも一つが正の解である条件付き確率を求めよ。

空　白

〔 4 〕　a，b，c を実数とし，2 次方程式 $x^2+x-(c-1)=0$ が実数解 α，β $(\alpha<\beta)$ をもつとする。さらに，二つの等式 $a+b=c^2$，$a\alpha+b\beta+c=0$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) α，β および $b-a$ を，それぞれ c を用いて表せ。

以下において，a，b，c を自然数とする。

(2) $\sqrt{4c-3}$ が自然数でないとき，自然数 a，b，c の組を求めよ。

(3) 自然数 s を用いて，$4c-3=s^2$ と表せるとき，s と a は等式

$$s^5-s^4+6s^3+2s^2+(9-32a)\,s=-15$$

を満たすことを示せ。

(4) (3) のとき，自然数 a，b，c の組をすべて求めよ。

空　白

〔５〕　次の（**A**），（**B**）から１題を**選択して**解答せよ。解答欄の（**A**・**B**）（問題番号〔５〕の右側）において，選択した問題記号を ○ で囲むこと。

（**A**）　座標平面において，曲線 $y = e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t, e^t)$ における法線を ℓ とし，ℓ と y 軸との交点を Q とする。$t \neq 0$ のとき，線分 PQ の中点を R とし，$t = 0$ のときは $\mathrm{R}(0, 1)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) t が実数全体を動くとき，点 R のえがく曲線 C の方程式を求めよ。

(3) (2) の曲線 C，y 軸，直線 $y = e^{-2} + e^2$ で囲まれた図形 F の面積を求めよ。

(4) (3) の図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

（**B**）　座標平面において，$\mathrm{O}(0, 0)$，$\mathrm{A}(4, 0)$，$\mathrm{P}(3, 0)$ とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする $\triangle\mathrm{OAB}$ を考える。ただし，円 C の中心は第１象限にあるとする。次の問いに答えよ。

(1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ。

(2) 円 C の半径を r とするとき，r のとる値の範囲を求めよ。

(3) r が (2) の範囲で変化するとき，点 B の軌跡の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。

空　白

試験時間中に机の上に置いてよいもの

○　本学受験票

○　大学入学共通テスト受験票

○　配付した問題冊子等

○　黒鉛筆（和歌，格言等が印刷されているものは不可）

○　鉛筆キャップ

○　シャープペンシル

○　消しゴム

○　鉛筆削り（電動式，大型のもの，ナイフ類は不可）

○　定規

○　コンパス

○　時計（辞書，電卓，端末等の機能があるものや，それらの機能の有無が判別しづらいもの，秒針音のするもの，キッチンタイマー，大型のものは不可）

○　眼鏡

○　ハンカチ

○　目薬

○　ティッシュペーパー（袋又は箱から中身だけ取り出したもの）

○　本学が試験当日に配付するフェイスシールド