令 和 3 年 度 入 試

個別学力試験問題(前期日程)

数　　　学

［医　学　部・医　学　科
　総合理工学部・数理科学科］

注　意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は 3 ページ，解答用紙は 5 枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 問題 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ は必答問題，問題 $\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ は選択問題です。$\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ のいずれか 1 問を選択し，解答用紙の選択欄に○印を記入の上，解答してください。選択欄の○印が $\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ の両方に記入されている場合，又はどちらにも記入されていない場合は，選択問題の得点は 0 点として取り扱います。
4. 解答はすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
5. 解答用紙の裏面を使ってはいけません。
6. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
8. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ 【必答問題】t を実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $\left(x+\dfrac{t}{x}\right)^3$ を展開せよ。

(2) 2 つの実数 a, b に対して，$f(x)=x^3+ax+b$ とする。x についての整式 $x^3 f\left(x+\dfrac{t}{x}\right)$ において x^4 の係数，x^3 の係数および x^2 の係数を求めよ。

(3) 3 次方程式 $x^3+3x-1=0$ は正の実数解 α をただ 1 つもつ。α を求めよ。

$\boxed{2}$ 【必答問題】α と β を実数とし，$\alpha<4$，$\beta \fallingdotseq 4$，$\alpha<\beta$ をみたすとする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+10}{a_n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定め，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\beta=\dfrac{6}{5}$ のとき，b_2 を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるような α，β を 1 組求めよ。

(3) (2) で求めた α，β に対して，$-10^{-78}<b_n<10^{-78}$ となる最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

$\boxed{3}$ 【必答問題】1から6の数字が1つずつ書かれた6枚のカードをテーブルの上に横一列に並べ，以下の操作を行う。

操作

2つのサイコロを投げ，その出た目の数を i，j とする。

- $i \neq j$ の場合
  i と書かれたカードと j と書かれたカードが共にテーブルの上にあればそれらを交換し，そうでなければ何もしない。
- $i = j$ の場合
  i と書かれたカードがテーブルの上にあればそれを取り除き，そうでなければ何もしない。

初めにカードは左から順に1，2，3，4，5，6と並んでいるとする。操作を n 回繰り返し行ったとき，次の確率を既約分数で答えよ。

(1) $n = 2$ のとき，テーブルの上に並んでいるカードが左から順に1，2，3，4，5，6である確率

(2) $n = 3$ のとき，テーブルの上にカードがちょうど3枚残っている確率

(3) $n = 3$ のとき，テーブルの上に2，5のカードはなく，2，5以外のすべてのカードが残っており，かつ左端が1で右端が6である確率

$\boxed{4}$ 【選択問題】複素数平面上の異なる3点 A(α), B(β), C(γ) は AB $=$ AC かつ $\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{2\pi}{n}$ (n は3以上の自然数) をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) $n=3$ のとき，$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|$ と $\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$ を求めよ。ただし，

$$-\pi < \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \leqq \pi$$

とする。

(2) $n=3$ のとき，$(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$ が成り立つことを示せ。

(3) 3以上の自然数 n に対し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\gamma-\alpha)^{n-k}(\beta-\alpha)^{k-1}=0$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{5}$ 【選択問題】$f(x)=\dfrac{3x+1}{2x+1}$ とおく。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ との交点を (α,α), (β,β) $(\alpha<\beta)$ とする。 次の問いに答えよ。

(1) α と β を求めよ。

(2) $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ によって囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) 点 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ に関して曲線 $y=f(x)$ と対称な曲線の方程式を求めよ。