２０２４年度入学試験問題

数　　学

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学Ａ・数学Ｂ）

注　　意

1　問題冊子は１冊（２ページ），解答用紙は４枚，下書き用紙は３枚です。

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙の受験番号記入欄２箇所に受験番号を正しく記入しなさい。

4　解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また，答えだけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。

5　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数　学（数学I・数学II・数学III・数学A・数学B）

1

m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れることを示せ。

(2) x^n-1 を x^2+x+1 で割った余りを求めよ。

(3) $x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りを求めよ。

2

数直線上を動く点Pがある。点Pは，原点Oを出発して，1枚のコインを1回投げるごとに，表が出たら数直線上を正の向きに1だけ進み，裏が出たら数直線上を負の向きに1だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとし，コインを n 回投げ終えた時点での点Pの座標を x_n とする。コインを10回投げるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(2) $x_5 \neq 1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(3) $0 \leqq x_n \leqq 3$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

3

四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$とし，$\angle\mathrm{COA}=\alpha$，$\angle\mathrm{COB}=\beta$，$\angle\mathrm{AOB}=\gamma$とする。ただし，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$とする。辺OAの延長上に点Dを$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$と$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$が垂直になるようにとり，辺OBの延長上に点Eを$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$と$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$が垂直になるようにとる。$\angle\mathrm{DCE}=\theta$とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$を$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\cos\alpha$を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\cos\beta$を用いて表せ。

(2) $\cos\theta$を$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$を用いて表せ。

(3) $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$，$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$とする。点Cから平面DOEに下ろした垂線の足をPとするとき，$\mathrm{CP}=\dfrac{1}{\tan\gamma}$となることを示せ。

4

座標平面上で，線分$S: x+y=1\ (0\leqq x\leqq 1)$と曲線$C: \sqrt{x}+\sqrt{y}=1$で囲まれた図形$D$を考える。$S$上に点$(0,\ 1)$からの距離が$t$となる点Pをとる。このとき，$0\leqq t\leqq\sqrt{2}$である。また，点Pを通り，直線$x+y=1$と垂直に交わる直線を$\ell$とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線ℓの方程式をtを用いて表せ。

(2) 直線ℓと曲線Cの交点をQとする。線分PQの長さをtを用いて表せ。

(3) 図形Dを直線$x+y=1$のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。