２０２２年度入学試験問題

数　学

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学Ａ・数学Ｂ）

注　意

1　問題冊子は１冊（２ページ），解答用紙は４枚，下書き用紙は３枚です。

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙の受験番号記入欄２箇所に受験番号を正しく記入しなさい。

4　解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また，答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。

5　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数　学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

1

A，B，Cの3人で次のルールに従って一連の試合を行い，優勝者を決定する。

- 1試合目はAとBが戦う。
- 自然数nに対し，$n+1$試合目はn試合目の勝者とn試合目に戦わなかった人が戦う。
- 2連勝した人が出た時点で，その人が優勝者となり，以後試合は行わない。
- すべての試合において，引き分けはないものとする。

A，B，Cが互いに戦う際の勝率は次の通りとする。ただし，pは$0<p<1$を満たす実数とする。

- AとBの試合：勝つ確率はAとBのどちらも$\dfrac{1}{2}$である。
- AとCの試合：Aが勝つ確率は$1-p$，Cが勝つ確率はpである。
- BとCの試合：Bが勝つ確率は$1-p$，Cが勝つ確率はpである。

n試合目で優勝者が決定する確率をa_nとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3，a_4を求めよ。

(2) 自然数kに対し，a_{3k}を求めよ。

(3) Cが優勝する確率を求めよ。

(4) 1以上99以下の自然数Nに対し$p=\dfrac{N}{100}$であるとする。このときCが優勝する確率が$\dfrac{1}{3}$以上になるようなNの最小値を求めよ。

2

aを実数とし，座標平面上の曲線

$$C: y=x^3+(a+2)x^2+2ax+2$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) aがどのような値をとっても曲線Cは2つの定点を通る。その2点の座標を求めよ。

(2) (1) で求めた2点のうち，x座標の小さい方を点A，もう一方を点Bとし，その2点を通る直線をLとする。曲線Cと直線Lが異なる3点で交わり，その交点がすべて線分AB上にあるようなaの値の範囲を求めよ。

(3) aの値が (2) で求めた範囲にあるとする。このとき，曲線Cと (2) で定めた直線Lで囲まれた部分の面積$S(a)$の最小値を求めよ。

3

ℓを正の実数とし，四面体OABCにおいて，各辺の長さを

$$\mathrm{OA}=\frac{1}{2}\ell,\quad \mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\ell,\quad \mathrm{AB}=\mathrm{CA}=\ell,\ \mathrm{BC}=\sqrt{2}\,\ell$$

とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とし，点Hは$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}$を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点Hは3点A，B，Cが定める平面上に存在することを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$の値を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{OHB}$の大きさを求めよ。

(4) 四面体OABCの体積Vを求めよ。

4

$-1<x<1$に対して

$$f(x)=\log(1+x)+\log(1-x)-x\log(1-x)$$

とおく。ただし，対数は自然対数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $-1<x<1$のとき，$f'(x)\geqq 0$であることを示せ。

(2) $-1<x<1$，$x\neq 0$のとき，$\dfrac{f(x)}{x}>0$であることを示せ。

(3) nが2以上の整数のとき，不等式

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}<\frac{n-1}{n}<\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}$$

が成り立つことを示せ。