令和4年度
前期日程

数　学

教育学部［数学（ロ）］
医学部医学科
工学部

問　題　冊　子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は5ページで，解答用紙は5枚である。
   落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。
3. **受験番号は，5枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。**
4. 問題は，大問5題である。
5. **大問の配点比率は全て20％である。**
6. **解答は，解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし，やむをえない場合は裏面にまわってよいが，表面に「裏に続く」と明記すること。**
7. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
8. 解答用紙は持ち帰らないこと。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ $a>0$ とする。空間内の5点 A$(a, 0, 0)$，B$(0, a, 0)$，C$(-a, 0, 0)$，D$(0, -a, 0)$，E$(0, 0, 2a)$を頂点とする正四角錐を考える。3辺 EB，EC，ED 上に $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=t\overrightarrow{\mathrm{EB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=s\overrightarrow{\mathrm{EC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}=t\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ となる3点 F，G，H をとる。ただし，$0<s\leqq 1$，$0<t\leqq 1$ とする。線分 AG と線分 FH は交点 I をもつとする。以下の問に答えよ。

(1) I の座標を a と t で表せ。

(2) t を s で表せ。

(3) $\mathrm{BI}\perp\mathrm{DI}$ のとき，s の値を求めよ。

(4) $\mathrm{BI}\perp\mathrm{DI}$ とする。$\angle\mathrm{BGD}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

2 ある製品が工場Aと工場Bで生産されている。工場Aで生産された製品が不良品である確率を $\frac{1}{20}$，工場Bで生産された製品が不良品である確率を $\frac{1}{10}$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 工場Aと工場Bで生産された多数の製品がある。その中から1つ取り出すとき，その製品が工場Aで生産されたものである確率を $\frac{3}{5}$，工場Bで生産されたものである確率を $\frac{2}{5}$ とする。取り出された製品が不良品である確率を求めよ。

(2) 製品が不良品か否かを判定する検査装置の導入を考える。この検査装置は検査対象が不良品だったとき，$\frac{9}{10}$ の確率で不良品であることを正しく判定する。一方，不良品でない製品を検査したときにも $\frac{1}{10}$ の確率で不良品であると誤って判定する。工場Aで生産された製品を1つ取り出して検査装置で検査したとき，それが不良品と判定される確率を求めよ。

(3) 工場Aで生産された製品を1つ取り出して(2)の検査装置で検査したところ，不良品と判定された。その製品が実際に不良品である確率を求めよ。

(4) 工場Aで生産された製品を出荷前に(2)の検査装置で検査し，不良品と判定されたものを取り除いてから出荷する。このとき，工場Aから出荷された検査済みの製品が実際に不良品である確率を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$ を初項が 12 で公差 8 の等差数列とする。また，次の条件で定められる数列 $\{b_n\}$ がある。

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = b_n + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

以下の問に答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。

(4) 和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}$ を求めよ。

(5) 数列 $\{c_m\}$ を，次のように定める。各自然数 m に対して，(4) の和 S_n が

$$\frac{1}{2} - S_n < \frac{1}{10^m}$$

となるような最小の自然数 n を c_m とする。このとき，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k$ を求めよ。

4 n, k は自然数とする。以下の問に答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) α, β は実数とする。$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$ を $\cos\alpha$, $\sin\beta$ を用いて表せ。

(2) θ は実数とする。以下の等式を示せ。

$$\left(\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos k\theta\right)\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{(2k+1)\theta}{2}$$

(3) 部分積分法を用いて，次の定積分をそれぞれ求めよ。

$$I=\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx,\qquad J=\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$$

(4) 区分求積法を用いて，次の極限をそれぞれ求めよ。

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{\pi k}{n}}\cos\frac{\pi k}{n}\right),\qquad Q=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{\pi k}{n}}\sin\frac{\pi k}{n}\right)$$

(5) n に対して，

$$S_n=\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{\pi k}{n}}+\cos\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{\pi k}{n}}+\cos\frac{2\pi}{n}\cdot\sum_{k=2}^{n}e^{\frac{\pi k}{n}}+\cos\frac{3\pi}{n}\cdot\sum_{k=3}^{n}e^{\frac{\pi k}{n}}\right.$$
$$\left.+\cdots+\cos\frac{\pi(n-1)}{n}\cdot\sum_{k=n-1}^{n}e^{\frac{\pi k}{n}}+\cos\frac{\pi n}{n}\cdot\sum_{k=n}^{n}e^{\frac{\pi k}{n}}\right\}$$

とする。以下の等式を示せ。

$$S_n=\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\left\{e^{\frac{\pi k}{n}}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}}\right\}$$

(6) (5) の S_n に対して，極限 $\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

5 $a > 0$とする。関数

$$f(x) = ax^2 - x + 1 - a \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を考える。以下の問に答えよ。

(1) 関数$g(t) = \sqrt{1 - t^2} \quad (0 \leqq t < 1)$を微分せよ。

(2) $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$のとき，関数$f(x)$の最大値と最小値を求めよ。また，そのときのxの値を，それぞれ求めよ。

(3) $a > \dfrac{1}{2}$のとき，関数$f(x)$の最大値と最小値を求めよ。また，そのときのxの値を，それぞれ求めよ。

(4) 関数$|f(x)|$の最大値，および，そのときのxの値を求めよ。

(5) 関数$h(t) = \left|1 - \sqrt{1 - t^2} - at^2\right| \quad (0 \leqq t \leqq 1)$の最大値を求めよ。ただし，そのときの$t$の値を求める必要はない。