

## 令和3年度 入学者選抜学力検査問題

# 数 学 (理系 $\beta$ )

数学Ⅰ, 数学A  
数学Ⅱ, 数学B  
数学Ⅲ

### 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子および解答用紙の中を見てはいけません。
2. 問題〔1〕～〔3〕は必答問題で、〔4〕,〔5〕は選択問題です。また、解答用紙は5枚あります。
3. 必答問題〔1〕～〔3〕の解答は、それぞれの番号が書かれた解答用紙に記入してください。
4. 選択問題〔4〕,〔5〕のいずれか1題を選択してください。選択した問題の解答は、選択した問題の番号が書かれた解答用紙に記入してください。
5. 解答用紙5枚のうち、必答問題〔1〕～〔3〕の解答用紙3枚と、選択問題〔4〕,〔5〕で、選択した問題の解答用紙のみ1枚、合わせて4枚を提出してください。
6. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
7. 試験開始後、すべての解答用紙に受験番号、志望学部および氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に2箇所あります。
8. 解答は各問、指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。
9. 裏面その他に解答を記入した場合、その部分は採点の対象となりません。
10. 各問題の配点50点は200点満点としたときのものです。
11. 試験終了後、問題冊子および計算用紙は持ち帰ってください。





[ 1 ] 【必答問題】 (配点 50) 次の問いに答えなさい。ただし,  $m$ ,  $n$  は自然数とする。

- (1) 10 以上 100 以下の自然数のうち, 3 で割り切れるものの和を求めなさい。
- (2) 10 以上  $3m$  以下の自然数のうち, 3 で割り切れるものの和が 3657 であるとする。このとき,  $m$  の値を求めなさい。
- (3) 18 以上  $3n$  以下の自然数のうち, 15 との最大公約数が 3 であるものの和が 2538 であるとする。このとき,  $n$  の値を求めなさい。



〔2〕 【必答問題】（配点50） 箱の中に、1から3までの番号が1つずつ書かれた3枚の赤いカードと、1から3までの番号が1つずつ書かれた3枚の黒いカードが入っている。箱からカードを1枚ずつ無作為に取り出して、テーブルの上に、左から右へと取り出した順に並べていくとする。並べられた6枚のカードについて、次の問いに答えなさい。

- (1) 隣り合うどの2枚のカードも色が異なる確率を求めなさい。
- (2) 番号1が書かれている2枚のカードが隣り合わない確率を求めなさい。
- (3) 隣り合うどの2枚のカードも番号が異なる確率を求めなさい。



[ 3 ] 【必答問題】 (配点 50)  $a, \theta$  を  $a > 0, 0 < \theta < 2\pi$  を満たす定数とする。このとき, 方程式

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x \cos \theta + 1}}{x^2 - 1} = a$$

の区間  $x > 1$  における実数解の個数は 1 個であることを証明しなさい。





[ 4 ] 【選択問題】 (配点 50)  $e$  を自然対数の底とする。  $t$  を  $0 < t < 1$  を満たす実数とし、座標平面において、曲線  $y = e^x$  上に 3 点  $P(0, 1)$ ,  $Q(t, e^t)$ ,  $R(1, e)$  をとる。点  $Q$  における  $y = e^x$  の接線と  $x$  軸、および 2 直線  $x = 0$ ,  $x = 1$  で囲まれた図形の面積を  $S_1(t)$  とする。また、線分  $PQ$  と線分  $QR$  と  $x$  軸、および 2 直線  $x = 0$ ,  $x = 1$  で囲まれた図形の面積を  $S_2(t)$  とする。さらに、 $y = e^x$  と  $x$  軸、および 2 直線  $x = 0$ ,  $x = 1$  で囲まれた図形の面積を  $S_0$  とする。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1)  $t$  が  $0 < t < 1$  の範囲を動くとき、 $S_1(t)$  の最大値を求めなさい。
- (2)  $t$  が  $0 < t < 1$  の範囲を動くとき、 $S_2(t)$  の最小値を求めなさい。
- (3)  $S_0 \geq S_1(t)$  であることを用いて、次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$e \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

- (4)  $S_2(t) \geq S_0$  であることを用いて、次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$e \leq \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

必要ならば、 $x > 1$  のとき

$$(x - 1) \log(x - 1) \geq (x - 1) \log x - 1 + \frac{1}{2x}$$

が成り立つことを用いてよい。ただし、対数は自然対数とする。



[ 5 ] 【選択問題】 (配点 50)  $f(x) = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ),  $g(x) = 2 \sin^2 x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) とするとき、次の問いに答えなさい。

(1) 2つの曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  の共有点の座標と  $y = g(x)$  の増減、極値を調べ、この2つの曲線のグラフの概形をかきなさい。ただし、グラフの変曲点と凹凸は調べなくてよい。

(2)  $I_n(x)$  を  $I_n(x) = \int_0^x \sin^n t \, dt$  と定めたとき、次の式が成り立つことを示しなさい。

$$I_1(x) = 1 - \cos x$$

$$I_2(x) = \frac{x - \sin x \cos x}{2}$$

$$I_n(x) = -\frac{1}{n} \{ \sin^{n-1} x \cos x - (n-1) I_{n-2}(x) \} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

(3) 2つの曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  の共有点の  $x$  座標のうち、0以外で最小のものを  $\alpha$  とする。区間  $0 \leq x \leq \alpha$  において2つの曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  で囲まれた図形を  $x$  軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めなさい。







