

理学部数学科・医学部・薬学部試験問題

数 学

注 意

1. 開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は1ページから3ページにわたっています。解答用紙は3枚、計算用紙は1枚で、問題冊子とは別になっています。試験開始の合図があってから直ちに確認し、不備がある場合は監督者に申し出てください。
3. 各解答用紙には志望学部を書く欄が1か所と受験番号を書く欄が2か所あります。もれなく記入してください。
4. 解答は指定された解答用紙に記入してください。その際、解答用紙の番号を間違えないようにしてください。指定された解答用紙以外に記入した解答は、評価（採点）の対象としません。
5. 解答用紙の裏面には解答を書いてはいけません。解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は、評価（採点）の対象としません。
6. 解答用紙は一切持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子、計算用紙は持ち帰ってください。

1 次の問いに答えよ。

(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$) とおく。

このとき、 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ であることを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ を求めよ。

(3) 2つの定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2 \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2 \cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ が等しいことを示せ。

(4) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2 \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ を求めよ。

(5) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ を求めよ。

(解答用紙は 1 を使用せよ)

数・医・薬 1

2 e を自然対数の底として、 $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$ ($x \geq 0$) を考える。次の問いに答えよ。ただし、正の整数 n に対して、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-\frac{x}{2}} = 0$ であることは用いてよい。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減、およびグラフの凹凸を調べ、グラフをかけ。また、変曲点が2つ以上あれば、それらの y 座標の大小関係も調べよ。ただし、 $2 < e < 3$ であることを用いてもよい。
- (2) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ。
- (3) a を正の実数とする。 xy 平面において、 $0 \leq y \leq f(x)$, $0 \leq x \leq a$ を満たす部分の面積を $S(a)$ とするとき、 $S(a)$ を a の式で表せ。
- (4) (3) の $S(a)$ に対して、 $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$ を求めよ。

(解答用紙は 2 を使用せよ)

数・医・薬 2

3 n を正の整数とし、命題 $P(n)$ を

「すべての整数 z に対して、 $z^{3^n} - z^{3^{n-1}}$ は 3^n の倍数である」

とする。次の問いに答えよ。

- (1) 命題 $P(1)$ が真であることを示せ。
- (2) 命題 $P(2)$ が真であることを示せ。
- (3) すべての正の整数 n に対して、命題 $P(n)$ が真であることを示せ。

(解答用紙は 3 を使用せよ)

数・医・薬 3