令和5年度入学試験問題

数　学

(前期日程)

	学部等	ページ	解答用紙枚数
1	工　学　部 **【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B】**	1～ 6	5
2	医　学　部 **【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B】**	7～12	5
3	教育学部(小主免理系・中主免理系) **【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B】** または **【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B】**	13～18	4
4	教育学部(小主免理系・中主免理系を除く) 農　学　部 **【試験科目　数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B】**	19～22	3

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 上記の1から4のうち，志願したものを選び解答すること。1から4のそれぞれの初めのページに注意事項が記載されているので，試験開始後，よく読んで解答を始めること。
3. すべての解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入すること。受験番号が正しく記入されていない場合は，採点されないことがある。
4. 指定されたもの以外を解答しても，また解答用紙の指定された解答欄以外の場所に解答しても採点の対象とはされないので，十分注意すること。
5. 試験中に問題冊子および解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁および汚損等がある場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
6. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

医　学　部

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B）

注　意　事　項

1. 問題は，１，２，３，４ および５の５問ある。これら５問をすべて解答すること。
2. 解答は問題ごとに指定された解答用紙の解答欄に記入すること。解答欄が不足する場合は，「裏面に続く」と書き，裏面の枠内を使用すること。

1　空間に四面体OABCがあり，$\mathrm{OA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=45^\circ$とする。点Bから直線OAにおろした垂線の足をDとし，点Cから平面OABにおろした垂線の足をEとする。また，点Fを，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}$となるように定める。このとき，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$として，次の各問に答えよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$の値をそれぞれ求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$を，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|$の値も求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$を，$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{f}$を用いて表せ。

(4)　四面体OACFの体積を求めよ。

2　表にA，裏にBと書かれたコインがある。このコインをn回投げる試行を行い，Aが出た回数と同じ枚数のイヌの絵はがき，Bが出た回数と同じ枚数のネコの絵はがきを貰えるとする。例えば，$n=3$のとき，ABAと出たら，イヌの絵はがきを2枚，ネコの絵はがきを1枚貰える。このとき，次の各問に答えよ。ただし，使用するコインは，表，裏がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の確率で出るものとする。

(1)　$n=3$のとき，イヌの絵はがきを2枚以上貰える確率を求めよ。

(2)　$n=3$のとき，イヌとネコのどちらの絵はがきも貰える確率を求めよ。

(3)　$n \geqq 3$のとき，Aが連続して3回以上出たら，貰えるイヌやネコの絵はがきに追加してウシの絵はがきも貰えることにする。$n=6$のとき，イヌ，ネコ，ウシのいずれの絵はがきも貰える確率を求めよ。

3 座標平面上に2点 A$(-1,0)$，B$(1,0)$ がある。また，点 P(x,y) が $x>1$，$y>0$ を満たしながら座標平面上を動くとする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(2) $\tan\angle\mathrm{APB}$ を，x と y を用いて表せ。

(3) 点 P が $x>1$，$y>0$，$\angle\mathrm{APB}\leqq\dfrac{\pi}{12}$ を満たしながらくまなく動くとき，点 P の動きうる領域を座標平面上に図示せよ。

4 自然数 $k=1,2,3,\cdots\cdots$ と $n=1,2,3,\cdots\cdots$ に対して，$\theta_k(n)$ を，$\theta_k(n)=\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{\pi}{2}$ で定め，座標平面上の円 C_n と直線 $L_{k,n}$ をそれぞれ，

$$C_n : x^2+y^2=\frac{1}{n^2},\quad L_{k,n} : x\sin\theta_k(n)-y\cos\theta_k(n)=0$$

とする。C_n と $L_{k,n}$ との2つの交点のうち，x 座標が大きい方の交点の x 座標を $x_k(n)$ とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $n \geqq k$ のときの $x_k(n)$ を求めよ。

(2) 次の空欄に当てはまる数または数式を求めよ。

自然数 m に対して，$A_t(m)$ $(t=0,1,2,\cdots\cdots)$ を，

$$A_t(m)=\sum_{k=1}^{m}x_k(k+t)$$

とし，B_N $(N=1,2,3,\cdots\cdots)$ を，

$$B_N=\sum_{t=0}^{N-1}A_t(N-t)$$

とする。このとき，$A_1(1)=\dfrac{\boxed{\text{あ}}}{4}$，$A_2(1)=\dfrac{\boxed{\text{い}}}{6}$ となる。

また，$B_2-B_1=\dfrac{\boxed{\text{う}}}{4}$，$B_3-B_2=\dfrac{\boxed{\text{え}}}{6}$ となる。

さらに，$N=2,3,4,\cdots\cdots$ に対して，

$$B_N-B_{N-1}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boxed{\text{お}}$$

となる。

(3) (2)で定めた B_N $(N=1,2,3,\cdots\cdots)$ について，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}(B_N-B_{N-1})$ の値を求めよ。

5 次の各問に答えよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) $a>1$ を満たす定数 a と，区間 $\frac{1}{a} \leqq x \leqq a$ において連続な関数 $f(x)$ に対して，等式

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{x(1+x^2)}\,dx$ の値を求めよ。

(3) 関数 $g(x)=\dfrac{\log x}{1+x^2}$ は，区間 $0<x \leqq \sqrt{e}$ においてつねに増加することを示せ。

(4) (3)の関数 $g(x)$ に対して，$y=g(x)\ (x>0)$ のグラフを C とする。曲線 C と x 軸および直線 $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で囲まれた部分の面積を S_1 とし，曲線 C と x 軸および直線 $x=\sqrt{e}$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき，S_1 と S_2 は等しいことを示せ。