令　和　5　年　度

試　験　問　題　②

学　科　試　験

（9時 ～ 12時）

【注　意】

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中をみてはならない.**
2. 試験教科，試験科目，ページ，解答用紙および選択方法は下表のとおりである.

教　科	科　目	ページ	解答用紙数	選　択　方　法
数　学	数　学	1 ～ 10	2　枚	数学，英語は**必須解答**とする. 理科は左の**3科目のうちから1科目**を選択せよ.
英　語	英　語	11 ～ 14	3　枚	
理　科	化　学	15 ～ 24	2　枚	
	生　物	25 ～ 42	2　枚	
	物　理	43 ～ 50	1　枚	

3. **監督者の指示**に従って，選択しない理科科目を含む**全解答用紙**(10枚)に受験番号と選択科目(理科のみ)を記入せよ.
   ①　**すべての受験番号欄に受験番号**を記入せよ.
   ②　**理科は選択科目記入欄に選択する1科目**を○印で示せ.

   上記①，②の記入がないもの，および理科2科目または理科3科目選択した場合は**答案全部を無効**とする.
4. 解答はすべて解答用紙の対応する場所に記入せよ.
5. 問題冊子の余白を使って，計算等を行ってもよい.
6. 試験開始後，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせよ.
7. 解答用紙はいずれのページも**切り離してはならない.**
8. **解答用紙は持ち帰ってはならない.** 問題冊子は持ち帰ってよい.

—余　白—

（このページに問題はありません）

数 学

【1】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ.

a, b, c を実数定数とし, $a > 0$ とする.

(1) 関数 $f(x) = ax + b - \log x$ は, $x =$ $\boxed{\text{ア}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる.

(2) 曲線 $C_1 : y = \log x + c$ を考え, C_1 上の点Pでの接線を $y = mx + n$ と表す. Pを C_1 上で動かすと, xy 平面上の点 (m, n) は曲線 $C_2 : y =$ $\boxed{\text{ウ}}$ 上を $x >$ $\boxed{\text{エ}}$ の範囲で動く. また, C_1 と C_2 は点 $\left(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}\right)$ でのみ交わる.

－余白（計算用紙）－

【2】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．ただし，解答に絶対値を用いてはならない．

m を正整数とし，$n = 2m$ とする．$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ を満たす実数とし，$f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$ を考える．

(1) $m = 1$ のとき $f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) l を 0 以上の整数とし，x は $a_l < x < a_{l+1}$ を満たす範囲にあるとする．ただし，$l = 0$ のときは $x < a_1$，$l = n$ のときは $x > a_n$ とする．このとき，$f(x)$ は

$$f(x) = \left(\boxed{\text{イ}}\right)x + \sum_{k=l+1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{l} a_k$$

である．

(3) x が実数全体を動くとき，$f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

－余白（計算用紙）－

【3】 以下の問に答えよ．ただし，答のみ記入すればよい．

複素数のうち実部も虚部も整数であるものをガウス整数と呼ぶ．特に実部も虚部も正整数のとき，そのガウス整数は“正である”ということにする．虚数単位を i とする．

(1) 0 以上の整数 n のうち，ガウス整数の絶対値の 2 乗となるものを，小さい方から順に 10 個求めよ．

整数 5 は $5 = (2+i)(2-i)$ と表せる．同じように整数を 2 つのガウス整数の積で表す方法を考える．

(2) ガウス整数 z, w が $6 = zw$ かつ $|z| \leqq |w|$ を満たすとき，絶対値の組 $(|z|, |w|)$ として考えられるものを 3 つ求めよ．

(3) 整数 6 を 2 つのガウス整数の積で表す方法を考える．2 つのガウス整数のうち少なくとも一方が正であるような表し方を 2 通り求めよ．ただし，積の順序を入れ替えただけの表し方は同一のものと考える．

－余白（計算用紙）－

【4】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

1から6の目があるサイコロを使ったゲームを行う．プレイヤーは初め数直線上の $x=4$ の位置にいて，以下のルールに従って移動する．

プレイヤーが $x=a$ の位置にいるとき，サイコロを振って ● 出た数が a より大きければ $x=a+1$ に移動 ● 出た数が a 以下ならば $x=a-1$ に移動

プレイヤーが $x=0$ か $x=6$ に到達した時点でゲームを終了する．

(1) サイコロを2回振ってゲームが終了する確率は $\boxed{\text{ア}}$．

(2) サイコロを $2n$ 回振ってゲームが終了する確率 P_n を求める．$2n$ 回でゲームが終了するためには，$2(n-1)$ 回後の位置が $x=2$ か $x=4$ でなければならない．$2(n-1)$ 回後の位置が $x=2$ である確率を a_{n-1}，$x=4$ である確率を b_{n-1} とすると

$$P_n = \boxed{\text{イ}}(a_{n-1}+b_{n-1})$$

が成り立つ．また，$x=2$ または $x=4$ の状態からサイコロを2回振って位置が $x=2$ または $x=4$ になる確率を考えると，a_k と b_k は漸化式

$$a_{k+1} = \boxed{\text{ウ}}a_k + \boxed{\text{エ}}b_k,\quad b_{k+1} = \boxed{\text{エ}}a_k + \boxed{\text{ウ}}b_k$$

を満たすから

$$a_{k+1}+b_{k+1} = \boxed{\text{オ}}(a_k+b_k)$$

が成り立つ．したがって $P_n = \boxed{\text{カ}}$．

－余白（計算用紙）－

【5】 xyz 空間内の点のうち, x 座標, y 座標, z 座標の値がすべて整数である点を格子点という. 原点を O とし, 3 つの格子点 A,B,C に対して次のような命題 (K) を考える.

(K) 空間内のどの格子点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ を選んでも,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

を満たすような整数 s, t, u が存在する.

(1) 次の（ア）と（イ）はどちらも正しい. いずれか一方を選んで, それを証明せよ. ただし, 解答の初めにどちらを証明するか明記すること.

（ア） 3 点 $\mathrm{A}(1,1,0), \mathrm{B}(1,1,1), \mathrm{C}(0,1,1)$ に対し, 命題 (K) は真である.

（イ） 3 点 $\mathrm{A}(1,1,0), \mathrm{B}(1,0,1), \mathrm{C}(0,1,1)$ に対し, 命題 (K) は偽である.

(2) 3 つの格子点 $\mathrm{A}(1,1,0), \mathrm{B}(b,1,0), \mathrm{C}(0,0,c)$ に対し, 命題 (K) が真となるような (b, c) の組を 4 つ求めよ.

－余白（計算用紙）－