# 令 和 3 年 度

## 試 験 問 題 ②

# 学 科 試 験

## （9時 ～ 12時）

【注　意】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中をみてはならない．
2. 試験教科，試験科目，ページ，解答用紙および選択方法は下表のとおりである．

| 教　科 | 科　目 | ページ | 解答用紙数 | 選　択　方　法 |
|---|---|---|---|---|
| 数　学 | 数　学 | 1 ～ 10 | 2　枚 | 数学，英語は必須解答とする．<br>理科は左の3科目のうちから1科目を選択せよ． |
| 英　語 | 英　語 | 11 ～ 14 | 3　枚 | |
| 理　科 | 化　学 | 15 ～ 26 | 2　枚 | |
| | 生　物 | 27 ～ 44 | 2　枚 | |
| | 物　理 | 45 ～ 52 | 1　枚 | |

3. 監督者の指示に従って，選択しない理科科目を含む全解答用紙（10枚）に受験番号と選択科目（理科のみ）を記入せよ．
   ①　すべての受験番号欄に受験番号を記入せよ．
   ②　理科は選択科目記入欄に選択する1科目を○印で示せ．
   上記①，②の記入がないもの，および理科2科目または理科3科目選択した場合は答案全部を無効とする．
4. 解答はすべて解答用紙の対応する場所に記入せよ．
5. 問題冊子の余白を使って，計算等を行ってもよい．
6. 試験開始後，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせよ．
7. 解答用紙はいずれのページも切り離してはならない．
8. 解答用紙は持ち帰ってはならない．問題冊子は持ち帰ってよい．

◇M2（339—57）

—余　白—

（このページに問題はありません）

# 数 学

【1】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ.

$a, b$ は正の実数とする. $x$ が正の範囲で定義された関数 $f(x) = (ax)^{-bx}$ を考える. この関数の値は正なので, 両辺の自然対数をとると $\log f(x) = \boxed{\text{ア}}$ となる. 両辺を $x$ で微分することを考え, 左辺の導関数を $f(x), f'(x)$ を用いて表すと $(\log f(x))' = \boxed{\text{イ}}$ であり, 右辺の導関数は $\left(\boxed{\text{ア}}\right)' = \boxed{\text{ウ}}$ である. よって, $f'(x) = \boxed{\text{エ}}$ であり, $f(x)$ は $x = \boxed{\text{オ}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる.

－余白（計算用紙）－

**【2】** 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ.

三角形OABにおいて, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする.

(1) 辺OAの中点をPとする. また辺ABを1:3に内分する点をQとする. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \boxed{\text{ア}}\,\vec{a} + \boxed{\text{イ}}\,\vec{b}$ である.

(2) 線分PQの中点をMとすると $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \boxed{\text{ウ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{エ}}\,\vec{b}$ である.

(3) 直線AMが直線OBと交わる点をRとすると $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boxed{\text{オ}}\,\vec{b}$ である.

(4) $\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \vec{0}$ が成り立つとき, $\alpha = \boxed{\text{カ}}$, $\beta = \boxed{\text{キ}}$ である.

－余白（計算用紙）－

【3】 以下の問に答えよ．ただし，答のみ記入すればよい．

整数を係数とする文字 $x$ に関する5次以下の整式全体からなる集合を $A$ とする．つまり，$A$ は

$$\{a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \mid a_0,\ldots,a_5 \text{は整数}\}$$

という集合である．整数 $k$ と $A$ の要素 $F(x)$ に対し，$T_k(F(x))$ を

$$T_k(F(x)) = xF''(x) - kF'(x)$$

と定める．ここで，$F'(x)$ は $F(x)$ を $x$ の関数とみた場合の導関数，$F''(x)$ は $F'(x)$ の導関数を表す．

(1) $F(x)=x^5-2x^4+3x^3-4x^2+5x-6$ に対し，$T_4(F(x))$ を求めよ．

(2) $A$ の要素のうち $T_2(F(x))=0$ を満たす整式 $F(x)$ 全体からなる集合を求めよ．

(3) $A$ の部分集合 $B$ をとり，$B$ のすべての要素 $F(x)$ に対して $T_3(F(x))$ を集めると

$$\{12bx+12c \mid b, c \text{は整数}\}$$

という集合になる．そのような $B$ をひとつ求めよ．

－余白（計算用紙）－

【4】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ.

1, 2, 3, 4, 8, 9 の 6 つの数字を, それぞれ 1 個ずつ横に並べて 6 桁の整数を作る. このとき, 作ることのできる 6 桁の整数は $\boxed{\text{ア}}$ 通りであり, その総和は $\boxed{\text{イ}}$ $\times$ 111111 である. また, 作ることのできる 6 桁の整数のうち, 2 の倍数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個あり, 4 の倍数は $\boxed{\text{エ}}$ 個あり, 9 の倍数は $\boxed{\text{オ}}$ 個あり, 11 の倍数は $\boxed{\text{カ}}$ 個ある.

－余白（計算用紙）－

【5】 $a, m, n$ は正整数であり $m > n$ とする.

(1) 整式 $x^{16}-1$ を因数分解せよ.

(2) $a^{2^m}-1$ は $a^{2^n}+1$ で割り切れることを証明せよ.

(3) $a^{2^m}+1$ と $a^{2^n}+1$ の最大公約数を $d$ とする. $a$ が偶数ならば $d=1$, 奇数ならば $d=2$ であることを証明せよ.

－余白（計算用紙）－