B

令和5年度

前期日程

数学問題

〔注意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない.
2. **受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること.**
3. 問題本文は，3 ページ，5 ページ，7 ページ，9 ページにある. 脱落している場合は直ちに申し出ること.
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている. 解答用紙をミシン目に従って切り離すこと.
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること. **指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする.**
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい.
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない.
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること.

(下 書 き 用 紙)

(下 書 き 用 紙)

1　n を 2 以上の自然数とする．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1} \right\} \leqq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n n(a_n - \log 2)$$

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{2}$ 平面上の 3 点 O, A, B が

$$\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1 \quad \text{かつ} \quad (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{3}$$

をみたすとする.

(1) $(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ を求めよ.

(2) 平面上の点 P が

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|\leqq\frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\leqq\frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最大値と最小値を求めよ.

（配点率 20 %）

$\boxed{3}$ P を座標平面上の点とし, 点 P の座標を (a, b) とする. $-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲にある実数 t のうち, 曲線 $y=\cos x$ 上の点 $(t, \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(\mathrm{P})$ とする. $N(\mathrm{P})=4$ かつ $0<a<\pi$ をみたすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ.

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

4　a, b を $a^2 + b^2 > 1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする．座標空間の点 $\mathrm{A}(a, 0, b)$ と点 $\mathrm{P}(x, y, 0)$ をとる．点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし，平面 α と直線 AP との交点を Q とする．

(1) $(\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}})^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 |\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$ が成り立つことを示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 1$ をみたすように点 $\mathrm{P}(x, y, 0)$ が xy 平面上を動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

5　1個のさいころを n 回投げて, k 回目に出た目を a_k とする． b_n を

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_1^{n-k} a_k$$

により定義し, b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする．

(1) p_1, p_2 を求めよ．

(2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

（配点率 20 %）