令和５(2023)年度入学試験問題(前期)

数　　　学

注　　意

1．合図があるまで裏返さないこと。

2．余白は計算に使用する。

3．受験票は机上に出しておくこと。

数　学（前　期）

〔1〕 座標平面上で，放物線 $C : y = x^2$ 上の異なる2点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ と $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における2本の法線の交点をPとし，点Bを点Aに限りなく近づけたときに点Pが近づく点をQとする。

(1) 放物線 C の点Aにおける法線の方程式を求めよ。

(2) Qの座標を a を用いて表せ。

(3) a が $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くとき，点Qが描く曲線の長さを求めよ。

〔2〕 関数 $f(x) = e^x \sin(e^x)$ について，以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸との共有点を，x 座標の小さい方から順に A_1，A_2，A_3，……とし，$\mathrm{A}_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の x 座標を a_n とする。また，線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする。a_n と S_n を求めよ。

(2) A_n における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を T_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_{n+1}}{T_n}$ を求めよ。

(3) $a_n < x < a_{n+1}$ における曲線 $y = |f(x)|$ と曲線 $y = e^x$ との共有点を B_n とし，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n$ の面積を U_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} U_n$ を求めよ。

〔3〕 以下の問いに答えよ。

(1) n を2以上の整数とする。実数係数の n 次方程式 $f(x) = 0$ が虚数解 α をもつならば，α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ も $f(x) = 0$ の解であることを示せ。

(2) n を正の整数とする。

半径1の円に内接する正 $2n + 1$ 角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \cdots\cdots \mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}$ について，

n 個の線分の長さの積 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_0\mathrm{A}_2 \times \mathrm{A}_0\mathrm{A}_3 \times \cdots\cdots \times \mathrm{A}_0\mathrm{A}_n$ を L とする。

複素数平面上で中心O，半径1の円に内接する正 $2n + 1$ 角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \cdots\cdots \mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}$ を考えることで，L を求めよ。

〔4〕 1から3までの数字が1つずつ書かれた3枚のカードが入っている箱と，頂点が反時計回りにA，B，Cの順に並んでいる正三角形ABCがある。箱から1枚のカードを取り出し，数字を確認してからもとに戻す。このとき，点Pを以下の**<規則>**にしたがって正三角形の頂点を移動させ，移動した頂点に応じて文字列を作る試行を行う。文字列は左から順に文字○，×を書くものとする。

<規則>

・1回目は次のようにする。

1の書かれたカードが取り出されたときは点Pを頂点Aにおき，文字○を書く。

2の書かれたカードが取り出されたときは点Pを頂点Bにおき，文字×を書く。

3の書かれたカードが取り出されたときは点Pを頂点Cにおき，文字×を書く。

・2回目以降は次のようにする。

$k(k = 1,\ 2,\ 3)$ の書かれたカードが取り出されたとき，点Pがおいてある頂点から反時計回りに k 個先の正三角形の頂点に移動し，移動した頂点がAのときは既にある文字列の右側に○を，移動した頂点がA以外のときは既にある文字列の右側に×を書く。

例えば，3回の試行において取り出されたカードに書かれた数字が順に1，2，3のとき，点PはA→C→Cと移動し，得られる文字列は○××である。この試行を $n(n \geqq 2)$ 回繰り返したとき，文字列中に×が連続しない確率を p_n とする。

(1) p_2，p_3，p_4 を求めよ。

(2) $p_n(n \geqq 2)$ を求めよ。

〔5〕 n を正の整数とし，$n!$ を9進法で表したときに末尾に並ぶ0の個数を $f(n)$ で表す。例えば，$10! = 3628800 = 6740700_{(9)}$ より，$f(10) = 2$ である。

(1) $f(8)$ および $f(6789)$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) k を0以上の整数とする。$f(n) = k$ のとき，$4k < n$ を示せ。

(3) $f(n) = 1000$ を満たす最小の n を求めよ。