令 和 6 年 度

数 学

問 題 冊 子

[1] (1) xを整数とし，

$$m = \frac{4x+6}{x^2+2x+3}$$

を考える．mが整数となるxとそのときのmを求めよ．

(2) kを整数とし，三次方程式

$$x^3+3x^2+x-3-k(x^2+2x+3)=0$$

を考える．この方程式が整数解を少なくとも一つ持つ様なkを求めよ．

[2] 漸化式$a_{n+1}=|\,a_n\,|-3$で定められた数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えよ．

(1) $a_1=3$のときのa_3とa_4を求めよ．また，$a_1=4$のときのa_3とa_4求めよ．さらに，$a_1=5$のときのa_3とa_4を求めよ．

(2) $a_1=3l$のとき，$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$となるnを求めよ．ただし，lは自然数とする．

(3) $a_1=3l-1$のとき，$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$となるnを求めよ．ただし，lは自然数とする．

(4) $a_1=3l-2$のとき，$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$となるnを求めよ．ただし，lは自然数とする．

[3] (1) $z+\dfrac{4}{z}=-2\sqrt{3}$を満たす複素数$z$を求め，$z^n$が実数となる最小の自然数$n$を求めよ．

(2) 0でない複素数zに対して，$\left|z+\dfrac{4}{z}\right|$の最小値とその最小値をとる$z$を求めよ．

[4] 実数aに対して，$[a]$をa以下の最大の整数とする．

(1) 閉区間$[1.4,\ 12]$および閉区間$[1,\ 13.2]$に属する整数の個数をそれぞれ求めよ．

(2) $a<b$のとき，閉区間$[a,\ b]$に属する整数の個数を，$[a]$および$[b]$を用いて表せ．

(3) $a_1<b_1$，$a_2<b_2$とする．座標平面上の長方形$\{(x,y)\,|\,a_1 \leqq x \leqq b_1,\ a_2 \leqq y \leqq b_2\}$に属する格子点の個数を，$[a_1]$と$[b_1]$と$[a_2]$と$[b_2]$を用いて表せ．ただし，格子点とは座標平面上の点で$x$座標と$y$座標がともに整数であるものをいう．

(4) 正の実数aに対して，座標平面上の正方形$\{(x,y)\,|\,a \leqq x \leqq 2a,\ a \leqq y \leqq 2a\}$に属する格子点の個数を$N$とし，この正方形の面積を$S$とする．$a$を限りなく大きくしたときの$\dfrac{N}{S}$の極限を求めよ．