

令和 5 年度

数 学

問 題 冊 子

[1] 次の各方程式について、その方程式をみたす自然数の組 (x, y) は存在するか。存在するときはすべての組を求め、存在しないときはそのことを示せ。

(1) $4xy - 12x - 3y = 25$

(2) $9x^2 - 4y^2 = 35$

(3) $9x^2 + 18x - 4y^2 + 16y = 72$

[2] xy 平面において方程式 $15x + 28y = 0$ が表す直線を L とする。

(1) L 上にない格子点と L との距離の最小値を求めよ。ただし、格子点とは xy 平面上の点で x 座標と y 座標がともに整数であるものをいう。

(2) (1) の最小値を与える格子点の座標 (x, y) の中で、 $|x| + |y|$ が最小となるものを求めよ。

[3] 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -1 + x - |x| + |x - 2|$$

とし、 $y = f(x)$ のグラフを C とする。

(1) C の概形をかけ。

(2) a を実数とするととき、 C と直線 $y = ax$ との共有点の個数を求めよ。

(3) (2) の共有点の個数が 2 個以上であるような a に対し、 C と直線 $y = ax$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ の最小値とそれをとる a を求めよ。

[4] z を複素数とし、 z, z^2, z^3 が表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。これらは互いに異なり、また $AB = AC$ であるとする。

(1) 上の条件をみたす z 全体を考えたとき、 A はどのような図形を描くか。

(2) A, B, C を結んだ図形が直角二等辺三角形になる z を求めよ。

(3) A, B, C を結んだ図形が正三角形になる z を求め、そのときの三角形 ABC を図示せよ。

