

令和 4 年度

数 学

問 題 冊 子

[1] n を自然数とする.

- (1) $n(n-1)$ が 4 の倍数ならば、「 n が 4 の倍数である」か、あるいは「 $n-1$ が 4 の倍数である」かのいずれかであることを示せ.
- (2) n が 2 桁の自然数であるとする. $n(n-1)$ が 100 の倍数ならば、「 n が 4 の倍数で、 $n-1$ が 25 の倍数である」か、あるいは「 n が 25 の倍数で、 $n-1$ が 4 の倍数である」かのいずれかであることを示せ.
- (3) n が 4 桁の自然数であるとする. n^2 の下 4 桁が n と一致するような n を求めよ.

[2] α を 0 でない複素数とする. 以下, i は虚数単位とする.

- (1) $\alpha = a + bi$ (a, b は実数) と表すとき, $z^2 = \alpha$ をみたす複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数) について, x^2 と y^2 をそれぞれ a と b を用いて表せ. さらに $\alpha = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ のときの z を求めよ.
- (2) $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と極形式で表すとき, $z^2 = \alpha$ をみたす 2 つの複素数を r と θ を用いて表せ. また, α が正の実数でもないとき, $z^2 = \alpha$ をみたす 2 つの複素数と α の 3 点を頂点とする三角形の面積 S を r と θ を用いて表せ.

[3] (1) 関数 $f(x) = (x^2 - x)^3$ の増減, 極値, グラフの凹凸, および変曲点を調べて, そのグラフの概形をかけ.

- (2) (1) を参考にして, 関数 $g(x) = |x^2 - x|^3$ のグラフの概形をかけ.

[4] (1) $\cos \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ.

(2) 等式

$$\sin 2x \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) - \frac{1}{2} \cos x = \cos x \sin(2x - \alpha)$$

が $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で成り立つような α を求めよ. ただし, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする.

(3) 関数

$$f(x) = \sin 2x \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) - \frac{1}{2} \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

について, $f(\beta) = 0$ ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) をみたす β を求め, $\int_0^\beta f(x) dx$ を求めよ.

