

令和3年度

数学

問題冊子

[1] (1) 半径1の3つの円があり、それぞれ互いに接しているとする。これらの3つの円が同時に内接する円の半径を求めよ。

(2) 幅3、高さ h の長方形の中に半径1の2つの円を、それらの内部が共有点をもたないように描くことを考える。それが可能となる h の最小値を求めよ。ただし、円は長方形と接してよい。

(3) 幅3、高さ h の長方形の中に半径1の3つの円を、どの2つの円の内部も共有点をもたないように描くことを考える。それが可能となる h の最小値を求めよ。ただし、円は長方形と接してよい。

[2] 自然数 a, b, c, n があり、 $a, b, c \leq 9$ であるとする。 p, q, r を

$$p = 2n^2 + 1, \quad q = np, \quad r = 100a + 10b + c - 1$$

のように定め、さらに r は3で割り切れるとする。

(1) $a + b + c - 1$ は3で割り切れることを示せ。

(2) n が3で割り切れないとき、 p は3で割り切れることを示せ。

(3) q は3で割り切れることを示せ。

(4) p は5で割り切れないことを示せ。

(5) $n = a + b + c - 1$ であり、 q と r がともに15で割り切れるとする。このとき、 r を最大、および最小にする a, b, c をそれぞれ求めよ。

[3] 座標平面上に曲線 $C: y = x^3$ がある.

- (1) C 上の点 (t, t^3) における接線の方程式を求めよ.
- (2) 座標平面上の点で, その点から C への接線が3つ引けるようなものの範囲を図示せよ.
- (3) 点 $(-1, 4)$ を通る直線で, C に接するものはただ1つであることを示せ. その直線を l とするとき, l の方程式を求め, さらに C と l で囲まれた部分の面積を求めよ.

[4] 関数

$$f(x) = \frac{1}{900000}(x-100)^3 - \frac{1}{6000}(x-100)^2 + 3$$

を考える. 自然数 n に対して, 曲線 $y = f(x)$, x 軸, y 軸と直線 $x = n$ で囲まれた領域内にある点で, 各座標が自然数であるものの個数を $N(n)$ とする. ただし, 領域は境界を含むものとする.

- (1) $f(0)$, $f(250)$, $f(290)$ の値を求めよ. ただし, それらが整数でないときは小数第1位まで求めよ.
- (2) $0 \leq x \leq 290$ における $f(x)$ の増減表を作成し, グラフをかけ.
- (3) $f(12)$, $f(13)$ の値を求めよ. ただし, それらが整数でないときは小数第1位まで求めよ. さらに, $N(13)$ を求めよ.
- (4) $f(278)$ の値を求めよ. ただし, それが整数でないときは小数第1位まで求めよ.
- (5) $N(n) - N(250) \geq 100$ となる最小の n を求めよ.