理科系　令和６年度　入学試験問題・答案紙・数学公式集

数　　　　　学

（情—自然，コン・理・医・工・農）

2 月 26 日（月）10：00—12：30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて 12 枚（そのうち問題紙 1 枚，答案紙 4 枚，数学公式集 3 枚）である。
3. 落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあったら，ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し，すべての答案紙の所定の 2 箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し，裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は，草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に，文科系，理科系の区別なく作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは，退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

問　題　紙

1 関数$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$に対して，$y=f(x)$のグラフをCとする。

(1) $f(x)$の極値を求めよ。

(2) x軸上の点$\mathrm{P}(t,\ 0)$からCにちょうど2本の接線を引くことができるとする。そのような実数tの値の範囲を求めよ。

(3) (2)において，Cの2つの接点のx座標をα，β $(\alpha<\beta)$とする。α，βがともに整数であるような組(α,β)をすべて求めよ。

2 cを1より大きい実数とする。また，iを虚数単位として，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$とおく。複素数$z$に対して，

$$P(z)=z^3-3z^2+(c+2)z-c,\quad Q(z)=-\alpha^7z^3+3\alpha^6z^2+(c+2)\alpha z-c$$

と定める。

(1) 方程式$P(z)=0$を満たす複素数zをすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ。

(2) 方程式$Q(z)=0$を満たす複素数zのうち実部が最大のものを求めよ。

(3) 複素数zについての2つの方程式$P(z)=0$，$Q(z)=0$が共通解βを持つとする。そのときのcの値とβを求めよ。

3 座標空間の3点$\mathrm{A}(3,\ 1,\ 3)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{C}(4,\ 0,\ 1)$の定める平面をHとする。また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad (s,\ t\text{は非負の実数})$$

を満たすすべての点Pからなる領域をKとする。

(1) 内積$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を求めよ。

(2) 原点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$から平面Hに下ろした垂線の足をQとする。$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$で表せ。

(3) 領域K上の点Pに対して，線分QP上の点で$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (rは非負の実数)を満たす点Rが存在することを示せ。

(4) 領域Kにおいて原点Oからの距離が最小となる点Sの座標を求めよ。

4 袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合をp $(0\leqq p\leqq 1)$とする。袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す試行を行う。試行をn回行うとき，赤玉をk回以上取り出す確率を$f(k)$とおく。

(1) $n\geqq 2$に対して，$f(1)$と$f(2)$を求めよ。

(2) $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$に対して，等式

$$f(k)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

を示せ。

(3) 自然数kに対して，定積分

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k\,dx$$

を求めよ。

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図　形　と　式）

6. 数直線上の2点 x_1，x_2 を $m:n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：
$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベ　ク　ト　ル）

10. 2つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

（複　素　数）

11. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$(r = |z|,\ \theta = \arg z)$

12. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2 + px + q = 0$の解がα，βのとき，$\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$

15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$の解がα，β，γのとき，$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$

（対　数）

16. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

17. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

20. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\}$

21. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

22. $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$，$\left(\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項a，公差d，項数nの等差数列の和：$S_n = \dfrac{1}{2}n(a+\ell) = \dfrac{1}{2}n\left\{2a + (n-1)d\right\}$，$(\ell = a + (n-1)d)$

24. 初項a，公比r，項数nの等比数列の和：$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$(r \neq 1)$

25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極　　　　　限）

26. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots\cdots$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（微　　積　　分）

28. $\left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$

29. $x = f(y)$のとき $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x = x(t)$，$y = y(t)$のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)' = \frac{1}{x}$

32. $x = g(t)$のとき $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$

33. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

34. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$

35. $\int \log x\, dx = x\log x - x + C$

36. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2 (a > 0)$，$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}\ (a \neq 0)$，$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$

37. 回転体の体積：$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$

38. 曲線の長さ：$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x = x(t),\ y = y(t),\ a = x(\alpha),\ b = x(\beta))$

（順列・組合せ）

39. ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

40. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$

（確　　　　　率）

41. 確率pの事象がn回の試行中r回起こる確率：$P_n(r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$，$(q = 1-p)$

42. 期待値：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし$p_i$は確率変数$X$が値$x_i$をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$をみたすとする。