

理科系

令和5年度 入学試験問題・答案紙・数学公式集

# 数 学

(情—自然, コン・理・医・工・農)

2月26日(日) 10:00—12:30

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて12枚(そのうち問題紙1枚, 答案紙4枚, 数学公式集3枚)である。
3. 落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し, すべての答案紙の所定の2箇所を受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し, 裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は, 草稿用を使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に, 文科系, 理科系の区別なく作成されたものであるが, 答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは, 退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。



ME

3月上旬までに、東進公式サイト  
「東進ドットコム」解答速報ページに  
解答例を掲載する予定です。  
解答のポイントについても随時更新の予定です。  
成績帳票とあわせて解答例を確認し、  
しっかり復習することで、志望校の学習に役立てましょう。



<https://www.toshin.com>







# 問 題 紙

**1** 実数係数の4次方程式  $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$  は相異なる複素数  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$  を解に持ち、それらは全て複素数平面において、点1を中心とする半径1の円周上にあるとする。ただし、 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  はそれぞれ  $\alpha, \beta$  と共役な複素数を表す。

- (1)  $\alpha + \bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha}$  を示せ。
- (2)  $t = \alpha + \bar{\alpha}, u = \beta + \bar{\beta}$  とおく。  $p, q, r, s$  をそれぞれ  $t$  と  $u$  で表せ。
- (3) 座標平面において、点  $(p, s)$  のとりうる範囲を図示せよ。

**2**  $0 < b < a$  とする。  $xy$  平面において、原点を中心とする半径  $r$  の円  $C$  と点  $(a, 0)$  を中心とする半径  $b$  の円  $D$  が2点で交わっている。

- (1) 半径  $r$  の満たすべき条件を求めよ。
- (2)  $C$  と  $D$  の交点のうち  $y$  座標が正のものを  $P$  とする。  $P$  の  $x$  座標  $h(r)$  を求めよ。
- (3) 点  $Q(r, 0)$  と点  $R(a - b, 0)$  とる。  $D$  の内部にある  $C$  の弧  $PQ$ , 線分  $QR$ , および線分  $RP$  で囲まれる図形を  $A$  とする。  $xyz$  空間において  $A$  を  $x$  軸の周りに1回転して得られる立体の体積  $V(r)$  を求めよ。ただし、答えに  $h(r)$  を用いてもよい。
- (4)  $V(r)$  の最大値を与える  $r$  を求めよ。また、その  $r$  を  $r(a)$  とおいたとき、  $\lim_{a \rightarrow \infty} (r(a) - a)$  を求めよ。

**3**

- (1) 方程式  $e^x = \frac{2x^3}{x-1}$  の負の実数解の個数を求めよ。
- (2)  $y = x(x^2 - 3)$  と  $y = e^x$  のグラフの  $x < 0$  における共有点の個数を求めよ。
- (3)  $a$  を正の実数とし、関数  $f(x) = x(x^2 - a)$  を考える。  $y = f(x)$  と  $y = e^x$  のグラフの  $x < 0$  における共有点は1個のみであるとす。このような  $a$  がただ1つ存在することを示せ。

**4**  $n$  を正の整数とし、  $n$  次の整式  $P_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$  を展開して  $P_n(x) = \sum_{m=1}^n {}_nB_m x^m$  と表す。

- (1) 等式  $\sum_{m=1}^n {}_nB_m = n!$  を示せ。
- (2) 等式

$$P_n(x+1) = \sum_{m=1}^n ({}_nB_m \cdot {}_mC_0 + {}_nB_m \cdot {}_mC_1 x + \cdots + {}_nB_m \cdot {}_mC_m x^m)$$

を示せ。ただし、  ${}_mC_0, {}_mC_1, \dots, {}_mC_m$  は二項係数である。

- (3)  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して、等式  $\sum_{j=k}^n {}_nB_j \cdot {}_jC_k = {}_{n+1}B_{k+1}$  を示せ。





# 数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1.  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ,  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ , ( $a, b, c$  は正または0)

2.  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3.  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

4.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

5.  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , ( $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ )

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点  $x_1, x_2$  を  $m:n$  に内分する点, および外分する点:  $\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ ,  $\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$

7. 点  $(x_1, y_1)$  と直線  $ax + by + c = 0$  との距離, および点  $(x_1, y_1, z_1)$  と平面  $ax + by + cz + d = 0$  との距離:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8. だ円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上の点  $(x_1, y_1)$  における接線:  $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

9. 双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  上の点  $(x_1, y_1)$  における接線:  $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

(ベ ク ト ル)

10. 2つのベクトルのなす角:  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$



(複素数)

11. 極形式表示:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , ( $r = |z|$ ,  $\theta = \arg z$ )  
12.  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  に対し,  $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$   
13. ド・モアブルの公式:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  に対し,  $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

14.  $x^2 + px + q = 0$  の解が  $\alpha, \beta$  のとき,  $\alpha + \beta = -p$ ,  $\alpha\beta = q$   
15.  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  の解が  $\alpha, \beta, \gamma$  のとき,  $\alpha + \beta + \gamma = -p$ ,  $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$ ,  $\alpha\beta\gamma = -r$

(対数)

16.  $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三角関数)

17.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$   
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$   
18.  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$   
19.  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$   
20.  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$   
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$   
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$   
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$   
21.  $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$   
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$   
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$   
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$   
22.  $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$ , ( $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ )

(数列)

23. 初項  $a$ , 公差  $d$ , 項数  $n$  の等差数列の和:  $S_n = \frac{1}{2} n(a + \ell) = \frac{1}{2} n \{2a + (n-1)d\}$ , ( $\ell = a + (n-1)d$ )  
24. 初項  $a$ , 公比  $r$ , 項数  $n$  の等比数列の和:  $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ , ( $r \neq 1$ )  
25.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$   
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$



(極 限)

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$28. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$29. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$30. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$31. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$32. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$33. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$34. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$$

$$35. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$36. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} (a \neq 0), \int_a^\beta (x - a)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6} (\beta - a)^3$$

$$37. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$38. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順列・組合せ)

$$39. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, (1 \leq r \leq n-1)$$

$$40. (a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$41. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, (q = 1 - p)$$

$$42. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$











