

理科系

令和4年度 入学試験問題・答案紙・数学公式集

数 学

(情—自然, コン・理・医・工・農)

2月26日(土) 10:00—12:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて12枚(そのうち問題紙1枚、答案紙4枚、数学公式集3枚)である。
3. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し、すべての答案紙の所定の2箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し、裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は、草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に、文科系、理科系の区別なく作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは、退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。



問 題 紙

1 a, b を実数とする。

- (1) 整式 x^3 を 2 次式 $(x - a)^2$ で割ったときの余りを求めよ。
- (2) 実数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + \beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x + b$ とする。 b の値に応じて、このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ。

2 1 つのサイコロを 3 回投げろ。1 回目に出る目を a , 2 回目に出る目を b , 3 回目に出る目を c とする。なおサイコロは 1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとする。

- (1) $ab + 2c \geq abc$ となる確率を求めよ。
- (2) $ab + 2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ。

3 複素数平面上に、原点 O を頂点の 1 つとする正六角形 $OABCDE$ が与えられている。ただしその頂点は時計の針の進む方向と逆向きに O, A, B, C, D, E とする。互いに異なる 0 でない複素数 α, β, γ が、

$$0 \leq \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leq \pi, \quad 4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0, \quad 2\gamma^2 - (3\alpha + \beta + 2)\gamma + (\alpha + 1)(\alpha + \beta) = 0$$

を満たし、 α, β, γ のそれぞれが正六角形 $OABCDE$ の頂点のいずれかであるとする。

- (1) $\frac{\beta}{\alpha}$ を求め、 α, β がそれぞれどの頂点か答えよ。
- (2) 組 (α, β, γ) をすべて求め、それぞれの組について正六角形 $OABCDE$ を複素数平面上に図示せよ。

4 関数 $f(x)$ は区間 $x \geq 0$ において連続な増加関数で $f(0) = 1$ を満たすとする。ただし $f(x)$ が区間 $x \geq 0$ における増加関数であるとは、区間内の任意の実数 x_1, x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つときをいう。以下、 n は正の整数とする。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2 - \frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2 - x} dx = \infty$ を示せ。

- (2) 区間 $y > 2$ において関数 $F_n(y)$ を $F_n(y) = \int_{2 + \frac{1}{n}}^y \frac{f(x)}{x - 2} dx$ と定めるとき、 $\lim_{y \rightarrow \infty} F_n(y) = \infty$ を示せ。また $2 + \frac{1}{n}$ より大きい実数 a_n で

$$\int_0^{2 - \frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2 - x} dx + \int_{2 + \frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2 - x} dx = 0$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ。

- (3) (2) の a_n について、不等式 $a_n < 4$ がすべての n に対して成り立つことを示せ。



数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, (a, b, c は正または0)
2. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
5. $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ($s = \frac{1}{2}(a+b+c)$)

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分する点, および外分する点: $\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$, $\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$
7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離, および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離:
 $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
8. だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$
9. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

(ベ ク ト ル)

10. 2つのベクトルのなす角: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$



(複素数)

11. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($r = |z|$, $\theta = \arg z$)
12. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$
13. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

14. $x^2 + px + q = 0$ の解が α, β のとき, $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$
15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α, β, γ のとき, $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(対数)

16. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三角関数)

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
18. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
19. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
20. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$
21. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
22. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ($\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

(数列)

23. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2} n(a + \ell) = \frac{1}{2} n \{2a + (n-1)d\}$, ($\ell = a + (n-1)d$)
24. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ($r \neq 1$)
25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$



(極 限)

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$28. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$29. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$30. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$31. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$32. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$33. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$34. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$$

$$35. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$36. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} (a \neq 0), \int_a^\beta (x - a)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6} (\beta - a)^3$$

$$37. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$38. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順列・組合せ)

$$39. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, (1 \leq r \leq n-1)$$

$$40. (a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$41. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, (q = 1 - p)$$

$$42. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$









