理科系　令和３年度　入学試験問題・答案紙・数学公式集

数　　学

（情—自然，コン・理・医・工・農）

２月 26 日（金）10：00—12：30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて 12 枚（そのうち問題紙１枚，答案紙４枚，数学公式集３枚）である。
3. 落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあったら，ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し，すべての答案紙の所定の２箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し，裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は，草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に，文科系，理科系の区別なく作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは，退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

問　題　紙

1　a を正の実数とする。放物線 $y=x^2$ を C_1，放物線 $y=-x^2+4ax-4a^2+4a^4$ を C_2 とする。以下の問に答えよ。

(1)　点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 が異なる2つの共通接線 ℓ，ℓ' を持つような a の範囲を求めよ。ただし C_1 と C_2 の共通接線とは，C_1 と C_2 の両方に接する直線のことである。

以下，a は(2)で求めた範囲にあるとし，ℓ，ℓ' を C_1 と C_2 の異なる2つの共通接線とする。

(3)　ℓ，ℓ' の交点の座標を求めよ。

(4)　C_1 と ℓ，ℓ' で囲まれた領域を D_1 とし，不等式 $x \leqq a$ の表す領域を D_2 とする。D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(5)　$S(a)$ を(4)の通りとする。a が(2)で求めた範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。

2　4つの実数を $\alpha=\log_2 3$，$\beta=\log_3 5$，$\gamma=\log_5 2$，$\delta=\dfrac{3}{2}$ とおく。以下の問に答えよ。

(1)　$\alpha\beta\gamma=1$ を示せ。

(2)　α，β，γ，δ を小さい順に並べよ。

(3)　$p=\alpha+\beta+\gamma$，$q=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ とし，$f(x)=x^3+px^2+qx+1$ とする。このとき $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-1)$ および $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ の正負を判定せよ。

3　1から12までの数字が下の図のように並べて書かれている。以下のルール(a)，(b)と(終了条件)を用いたゲームを行う。ゲームを開始すると最初に(a)を行い，(終了条件)が満たされたならゲームを終了する。そうでなければ(終了条件)が満たされるまで(b)の操作を繰り返す。ただし，(a)と(b)における数字を選ぶ操作はすべて独立な試行とする。

(a)　1から12までの数字のどれか1つを等しい確率で選び，下の図において選んだ数字を丸で囲み，その上に石を置く。

(b)　石が置かれた位置の水平右側または垂直下側の位置にある数字のどれか1つを等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く。例えば，石が6の位置に置かれているときは，その水平右側または垂直下側の位置にある数字7，8，9，10，12のどれか1つの数字を等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く。

(終了条件)　5，9，11，12の数字のどれか1つが丸で囲まれ石が置かれている。

ゲームの終了時に数字 j が丸で囲まれている確率を p_j とする。以下の問に答えよ。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12				

(1)　確率 p_2 を求めよ。

(2)　確率 p_5 と p_{11} を求めよ。

(3)　確率 p_5，p_9，p_{11}，p_{12} のうち最も大きいものの値を求めよ。

4　$0 \leqq a < 1$ を満たす実数 a に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=3\left[a_n+\frac{1}{2}\right]-2a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

という漸化式で定める。ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す。以下の問に答えよ。

(1)　a が $0 \leqq a < 1$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y)=(a_1,\ a_2)$ の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

(2)　$a_n-[a_n] \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$a_n < a_{n+1}$ であることを示せ。

(3)　$a_n > a_{n+1}$ ならば，$a_{n+1}=3[a_n]-2a_n$ かつ $[a_{n+1}]=[a_n]-1$ であることを示せ。

(4)　ある2以上の自然数 k に対して，$a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ が成り立つとする。このとき a_k を a の式で表せ。

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または 0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図　形　と　式）

6. 数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m : n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：
$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベ　ク　ト　ル）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

（複　素　数）

11. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$(r = |z|,\ \theta = \arg z)$

12. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$に対し，$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2 + px + q = 0$の解がα，βのとき，$\alpha + \beta = -p$，$\alpha\beta = q$

15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$の解がα，β，γのとき，$\alpha + \beta + \gamma = -p$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$，$\alpha\beta\gamma = -r$

（対　数）

16. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

20. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\right\}$

21. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A + B}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A + B}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$

22. $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$，$\left(\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項a，公差d，項数nの等差数列の和：$S_n = \dfrac{1}{2}n(a + \ell) = \dfrac{1}{2}n\left\{2a + (n-1)d\right\}$，$(\ell = a + (n-1)d)$

24. 初項a，公比r，項数nの等比数列の和：$S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$，$(r \neq 1)$

25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極　　　　　限）

26. $\displaystyle\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e=2.71828\cdots\cdots$

27. $\displaystyle\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（微　　積　　分）

28. $\left\{f(g(x))\right\}'=f'(g(x))g'(x)$

29. $x=f(y)$のとき $\displaystyle\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x=x(t)$，$y=y(t)$のとき $\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

32. $x=g(t)$のとき $\displaystyle\int f(g(t))g'(t)\,dt=\int f(x)\,dx$

33. $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$

34. $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C$

35. $\displaystyle\int\log x\,dx=x\log x-x+C$

36. $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2\,(a>0)$，$\displaystyle\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{4a}\,(a\neq 0)$，$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

37. 回転体の体積：$V=\pi\displaystyle\int_a^b\{f(x)\}^2\,dx$

38. 曲線の長さ：$\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x=x(t),\ y=y(t),\ a=x(\alpha),\ b=x(\beta))$

（順列・組合せ）

39. ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$(1\leqq r\leqq n-1)$

40. $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

（確　　　　　率）

41. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起る確率：$P_n(r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$(q=1-p)$

42. 期待値：$E(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$，ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ をみたすとする。