C — 1

令和5年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注 意 事 項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は9頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰りなさい。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部 ・ 学科等		解答する問題番号
数学 I 数学 II 数学 A 数学 B	国際教養学部 文学部 法政経学部 教育学部 園芸学部 先進科学プログラム	 人文学科（行動科学コース） 小学校コース 中学校コース （国語科教育分野， 社会科教育分野， 理科教育分野， 技術科教育分野） 小中専門教科コース 英語教育コース 特別支援教育コース 乳幼児教育コース 食料資源経済学科 化学関連分野 生物学関連分野 植物生命科学関連分野 人間科学関連分野	1 2 3
数学 I 数学 II 数学 III 数学 A 数学 B	教育学部	中学校コース （数学科教育分野）	3 4 5 6 7 8
	理学部 工学部 園芸学部 薬学部 先進科学プログラム	物理学科，化学科 生物学科，地球科学科 園芸学科，応用生命化学科 緑地環境学科 物理学関連分野 工学関連分野	4 5 6 7 8
	理学部	数学・情報数理学科	4 5 6 7 8 9
	医学部		5 6 7 8 9

1 座標平面上に点 O$(0,0)$，A$(0,2)$，B$(\sqrt{2},1)$ をとる。線分 OA 上に点 O，点 A と異なる点 P$(0,p)$ をとり，線分 BP 上の点 Q を，△APQ と △OBQ の面積が等しくなるようにとる。

(1) 直線 BP を表す方程式を求めよ。

(2) △OBQ の面積を p を用いて表せ。

(3) p が $0<p<2$ の範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

2 1個のさいころを投げて出た目によって得点を得るゲームを考える。出た目が1，2であれば得点は2，出た目が3であれば得点は1，出た目が4，5，6であれば得点は0とする。このゲームをk回繰り返すとき，得点の合計をS_kとする。

(1) $S_2 = 3$となる確率を求めよ。

(2) S_3が奇数となる確率を求めよ。

(3) $S_4 \geqq n$となる確率が$\dfrac{1}{9}$以下となる最小の整数nを求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) pを実数とする。曲線 $y = |x^2 + x - 2|$ と直線 $y = x + p$ の共有点の個数を求めよ。

(2) 等式 $f(x) = x^2 + \displaystyle\int_{-1}^{2} (xf(t) - t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

4 2つの実数 a, b は $0 < b < a$ を満たすとする。関数

$$f(x) = \frac{1}{b}\left(e^{-(a-b)x} - e^{-ax}\right)$$

の最大値を $M(a, b)$，最大値をとるときの x の値を $X(a, b)$ と表す。ここで，e は自然対数の底である。

(1) $X(a, b)$ を求めよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{b \to +0} X(a, b)$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{b \to +0} M(a, b)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 点Oを原点とする座標平面において，点Aと点Bが $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=5$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}=2$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$ となるような実数 k は存在しないことを示せ。

(2) 点Bから直線OAに下ろした垂線とOAとの交点をHとする。$\overrightarrow{HB}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(3) 実数 t に対し，直線OA上の点Pを $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}$ となるようにとる。同様に直線OB上の点Qを $\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}$ となるようにとる。点Pを通り直線OAと直交する直線を ℓ_1 とし，点Qを通り直線OBと直交する直線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 の交点をRとするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, t を用いて表せ。

(4) 3点O，A，Bを通る円の中心をCとするとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

6 1個のさいころを投げて出た目によって数直線上の点Pを動かすことを繰り返すゲームを考える。最初のPの位置を $a_0 = 0$ とし，さいころを n 回投げたあとのPの位置 a_n を次のルールで定める。

- $a_{n-1} = 7$ のとき，$a_n = 7$
- $a_{n-1} \neq 7$ のとき，n 回目に出た目 m に応じて

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + m & (a_{n-1} + m = 1, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ のとき}) \\ 1 & (a_{n-1} + m = 2, 12 \text{ のとき}) \\ 14 - (a_{n-1} + m) & (a_{n-1} + m = 8, 9, 10, 11 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) $a_2 = 1$ となる確率を求めよ。

(2) $n \geqq 1$ について，$a_n = 7$ となる確率を求めよ。

(3) $n \geqq 3$ について，$a_n = 1$ となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 関数

$$f(x) = \left| \cos x - \sqrt{5}\sin x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right|$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ。

(3) $S(t) = \displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ とおく。このとき $S(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{\textbf{8}}$ 実数 a, b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z = a + bi$ の形で表されるとき，a を z の実部，b を z の虚部とよび，それぞれ $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ と表す。

(1) $z^3 = i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

(2) $z^{100} = i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z) \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}(z) \geqq 0$ を満たすものの個数を求めよ。

(3) n を正の整数とする。$z^n = i$ を満たす複素数 z のうち, $\mathrm{Re}(z) \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすものの個数を N とする。$N > \dfrac{n}{3}$ となるための n に関する必要十分条件を求めよ。

9 関数 $f(x)$ と実数 t に対し，x の関数 $tx - f(x)$ の最大値があればそれを $g(t)$ と書く。

(1) $f(x) = x^4$ のとき，任意の実数 t について $g(t)$ が存在する。この $g(t)$ を求めよ。

以下，関数 $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ を持ち，次の 2 つの条件 (i)，(ii) が成り立つものとする。

(i) $f'(x)$ は増加関数，すなわち $a < b$ ならば $f'(a) < f'(b)$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ かつ $\lim_{x \to \infty} f'(x) = \infty$

(2) 任意の実数 t に対して，x の関数 $tx - f(x)$ は最大値 $g(t)$ を持つことを示せ。

(3) s を実数とする。t が実数全体を動くとき，t の関数 $st - g(t)$ の最大値は $f(s)$ となることを示せ。