C — 1

令和4年度入学者選抜学力検査問題

数　学

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄に受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は9頁です。落丁，乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰りなさい。

1 円周を12等分するように点A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{12}が時計回りに並んでいる。また，白球2個と黒球4個が入った袋がある。点Pを，次の操作によって12個の点上を移動させる。

操作：袋から球を一つ取り出した後にサイコロを投げる。白球ならば時計回りに，黒球ならば反時計回りに，サイコロの目の数だけPを移動させる。取り出した球は袋に戻さないこととする。

Pを最初に点A_1に置く。操作を1回行い，PがA_1から移動した点をQとおく。続けて操作を1回行い，PがQから移動した点をRとおく。もう一度操作を行い，PがRから移動した点をSとおく。

(1) $R = A_1$となる確率を求めよ。

(2) 3点Q, R, Sを結んでできる図形が正三角形となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$ 座標平面において，原点Oと点A$(1, 0)$と点B$(0, 1)$がある。$0 < t < 1$ に対し，線分BO，OA，ABのそれぞれを$t : (1-t)$に内分する点をP，Q，Rとする。

(1) $\triangle$PQRの面積をtの式で表せ。

(2) $\triangle$PQRが二等辺三角形になるときのtの値をすべて求めよ。

(3) $\theta = \angle$RPQとする。(2)のそれぞれの場合に$\cos\theta$を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ。

(2) $0 \leqq a \leqq 2$ とする。$S(a)$ を $y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3) (2) で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

4 0以上9999以下の整数を4桁で表示し，以下の操作を行うこととする。ただし，4桁で表示するとは，整数が100以上999以下の場合は千の位の数字を0，10以上99以下の場合は千の位と百の位の数字を0，1以上9以下の場合は千の位と百の位と十の位の数字を0，そして0はどの位の数字も0とすることである。

操作：千の位の数字と十の位の数字を入れ換える。さらに，百の位の数字と一の位の数字を入れ換える。

また，整数Lに対し，操作によって得られた整数を$\overline{L}$と表す。

(1) Mを0以上9999以下の整数とし，$M = 100x + y$のように整数x, y $(0 \leqq x \leqq 99,\ 0 \leqq y \leqq 99)$を用いて表す。操作によって得られた$\overline{M}$が$M$の$\dfrac{2}{3}$倍に3を足した数に等しいならば，$-197x + 298y = 9$が成り立つことを証明せよ。

(2) Nが0以上9999以下の整数ならば，操作によって得られた整数$\overline{N}$はNの$\dfrac{2}{3}$倍に1を足した数と等しくならないことを証明せよ。

5 nを自然数とする。n個のサイコロを同時に投げ，出た目の積をMとおく。

(1) Mが2でも3でも割り切れない確率を求めよ。

(2) Mが2で割り切れるが，3でも4でも割り切れない確率を求めよ。

(3) Mが4では割り切れるが，3では割り切れない確率を求めよ。

$\boxed{6}$ 座標空間において，原点Oと点A$(1,\ 0,\ -1)$と点B$(0,\ 5,\ 0)$がある。実数tを用いて$t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と表される点全体を$\ell$とする。また，$xy$平面上の$y=x^2$を満たす点全体からなる曲線を$C$とする。

(1) 曲線C上の点P$(a,\ a^2,\ 0)$を固定する。ℓ上の点Qを，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$が垂直であるようにとる。このとき，点Qの座標を$a$を用いて表せ。

(2) 曲線C上の点Rとℓ上の点Sのうち，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$を最小にする点Rと点Sの組み合わせをすべて求めよ。また，そのときの$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ x, y についての方程式

$$x^2 - 6xy + y^2 = 9 \qquad \cdots\cdots (*)$$

に関する次の問いに答えよ。

(1) x, y がともに正の整数であるような $(*)$ の解のうち，y が最小であるものを求めよ。

(2) 数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ が漸化式

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。このとき，$(x,\ y) = (a_{n+1},\ a_n)$ が $(*)$ を満たすならば，$(x,\ y) = (a_{n+2},\ a_{n+1})$ も $(*)$ を満たすことを示せ。

(3) $(*)$ の整数解 (x, y) は無数に存在することを示せ。

$\boxed{8}$ 正の整数 m, n に対して,

$$A(m,n) = (m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}dx$$

とおく。

(1) $e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,n) \leqq 1$ を証明せよ。

(2) 各 m に対して, $b_m = \lim_{n\to\infty} A(m,n)$ を求めよ。

(3) 各 n に対して, $c_n = \lim_{m\to\infty} A(m,n)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{9}}$ rを正の実数とし，関数

$$f(x) = x + \frac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

を考える。

(1) $r = 1$のとき，$f(x)$はつねに増加することを示せ。

(2) 次の条件を満たす最大の正の実数cを求めよ。

条件：$0 < r < c$のときは$f(x)$がつねに増加する。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等		解答する問題番号
数学 I 数学 II 数学 A 数学 B	国際教養学部		1 2 3
	文学部	人文学科（行動科学コース）	
	法政経学部		
	教育学部	小学校コース 中学校コース （国語科教育分野， 社会科教育分野， 理科教育分野， 技術科教育分野） 小中専門教科コース 英語教育コース 特別支援教育コース 乳幼児教育コース	
	園芸学部	食料資源経済学科	
	先進科学プログラム	化学関連分野 生物学関連分野 植物生命科学関連分野 人間科学関連分野	
数学 I 数学 II 数学 III 数学 A 数学 B	教育学部	中学校コース （数学科教育分野）	3 4 5 6 7 8
	理学部	物理学科，化学科 生物学科，地球科学科	4 5 6 7 8
	工学部		
	園芸学部	園芸学科，応用生命化学科 緑地環境学科	
	薬学部		
	先進科学プログラム	物理学関連分野 工学関連分野	
	理学部	数学・情報数理学科	4 5 6 7 8 9
	医学部		5 6 7 8 9