

令和3年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので、この冊子を裏返して必ず読み、志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし、この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄に受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ記入しなさい。その他の欄に記入してはいけません。
4. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
7. この冊子は9頁です。落丁、乱丁または印刷不備があったら申し出ること。
8. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 解答用紙は、記入の有無にかかわらず、持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰りなさい。



1 定数 a は $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{4}$ を満たすとする。座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす。

- 2 点 A, B は放物線 $y = -x^2 + 2a$ 上にある。
- 2 点 C, D は放物線 $y = 2x^2 - a$ 上にある。
- 2 点 A, D の x 座標は等しく、かつ正である。
- 点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい。

点 A の x 座標を t とする。長方形 ABCD の周および内部を、原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

(1) S を t の式で表せ。

(2) S の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

2 平面上に半径がそれぞれ a^2 , b^2 , c^2 ($0 < a < b < c$) の3つの円 A , B , C および直線 l がある。3つの円はどれも直線 l に接していて、どの2つの円も外接しているとする。

(1) c を a と b を用いて表せ。

(2) 数列 a , b , c が等比数列となるとき、その公比を求めよ。

3 袋に白球と黒球が5個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。

袋から1個の球を取り出す。それが白球ならば1点獲得する。黒球ならばさいころを投げ、出た目が3の倍数ならば1点獲得し、そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

- (1) $n = 2$ の場合、総得点が2点となる確率を求めよ。
- (2) $n = 3$ の場合、総得点が2点以上となる確率を求めよ。

4 m を正の整数とする。座標平面上の点 (x, y) で

$$xn^3 + yn^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

がすべて整数であるようなものは、連立不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq m$$

の表す領域に何個あるか答えよ。

5 袋に白球と黒球が5個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。

袋から1個の球を取り出す。それが白球ならば1点獲得する。黒球ならばさいころを投げ、出た目が3の倍数ならば1点獲得し、そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

- (1) $n = 2$ の場合、総得点が2点となる確率を求めよ。
- (2) $n = 4$ の場合、総得点が2点以上となる確率を求めよ。
- (3) $n = 10$ の場合、総得点が8点以上となる確率を求めよ。

6 座標平面上に曲線 $C : y = \frac{1}{x}$ および 3 点 $A(-1, -1)$, $B(-1, 0)$, $D(1, 0)$ がある。曲線 C 上の点 $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ に対して、直線 AP と直線 $y = -2$ の交点を Q とする。ただし、 P が A と等しいとき、直線 AP とは A における C の接線のこととする。また、直線 BQ に点 D から下ろした垂線と直線 BQ の交点を R とする。

- (1) 点 P が曲線 C 上を動くとき、点 R の軌跡を求めよ。
- (2) 直線 PR が原点を通るような実数 t の個数を求めよ。

7 以下の問いに答えよ。

- (1) $w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ とする。ただし、 i は虚数単位である。
 z を 0 でない複素数とするとき、次の等式を証明せよ。

$$\begin{aligned} & \left(z - \frac{1}{z}\right) \left(wz - \frac{1}{wz}\right) \left(w^2z - \frac{1}{w^2z}\right) \left(w^3z - \frac{1}{w^3z}\right) \left(w^4z - \frac{1}{w^4z}\right) \\ &= z^5 - \frac{1}{z^5} \end{aligned}$$

- (2) ある定数 C に対して、等式

$$\sin \theta \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right) \sin\left(\theta + \frac{6\pi}{5}\right) \sin\left(\theta + \frac{8\pi}{5}\right) = C \sin 5\theta$$

がすべての実数 θ で成り立つことを示せ。また、 C の値を求めよ。

- (3) $\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10}$ の値を求めよ。

8 2曲線 $C_1: y = e^{ax}$, $C_2: y = a \log x + b$ は, x 座標が t ($0 < t < 1$) の点で接していて, $a \neq 0$ であるとする。ただし, 2曲線が点 P で接するとは, P を共有し, P における接線が一致することである。

- (1) a および b を t の式で表せ。
- (2) 曲線 C_1 と x 軸, y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とする。極限值 $\lim_{t \rightarrow 1-0} S_1(t)$ を求めよ。
- (3) 曲線 C_2 と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする。極限值 $\lim_{t \rightarrow 1-0} S_2(t)$ を求めよ。

9 多項式 $f_n(x)$, $g_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を条件

$$f_1(x) = x, \quad g_1(x) = 1,$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + xg_n(x), \quad g_{n+1}(x) = g_n(x) - xf_n(x)$$

で定める。

(1) 正の整数 n に対して、等式

$$\{f_{n+1}(x)\}' = (n+1)g_n(x), \quad \{g_{n+1}(x)\}' = -(n+1)f_n(x)$$

が成り立つことを示し、多項式 $f_n(x)$ の次数を求めよ。

(2) 正の整数 n に対して、区間 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ において等式

$$\sin n\theta = f_n(\tan \theta) \cos^n \theta, \quad \cos n\theta = g_n(\tan \theta) \cos^n \theta$$

が成り立つことを示せ。

(3) 正の整数 n と実数 a に対して、方程式 $f_n(x) = ag_n(x)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により、以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等	解答する問題番号
数学 I 数学 II 数学 A 数学 B	国際教養学部 文学部 人文学科（行動科学コース） 法政経学部 教育学部 小学校コース 中学校コース （国語科教育分野， 社会科教育分野， 理科教育分野， 技術科教育分野） 小中専門教科コース 英語教育コース 特別支援教育コース 乳幼児教育コース 園芸学部 食料資源経済学科 先進科学プログラム 化学関連分野 生物学関連分野 植物生命科学関連分野 人間科学関連分野	1 2 3
数学 I 数学 II 数学 III 数学 A 数学 B	教育学部 中学校コース （数学科教育分野） 理学部 物理学科，化学科 生物学科，地球科学科 工学部 園芸学部 園芸学科，応用生命化学科 緑地環境学科 薬学部 先進科学プログラム 物理学関連分野 工学関連分野 理学部 数学・情報数理学科 医学部	1 4 5 6 7 8 4 5 6 7 8 4 5 6 7 8 9 5 6 7 8 9