

令和4年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. この問題冊子は試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 解答用紙は問題冊子とは別になっているので、解答はすべて解答用紙の指定されたところに記入すること。また、解答用紙は問題ごとに別になっているので、注意すること。
3. 受験番号を解答用紙の指定されたところへ必ず記入すること。決して氏名を書いてはいけない。
4. この問題冊子は持ち帰ること。

解答にあたっての注意事項

受験者は下の表にしたがって、志望学部学科の問題を解答すること。

学部	学科	解 答 す る 問 題
経法学部	全学科	1, 2, 3, 4 の4問
医学部	医学科	3, 4, 5, 6, 7 の5問
	保健学科	1, 2, 3, 4 の4問
工学部	全学科	3, 4, 5, 6 の4問

1

以下の問いに答えよ。

- (1) 平面上の三角形 ABC において、辺 BC の中点を O とするとき、

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ は \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} の内積を表す。

- (2) 平面上の 5 点 P, Q, R, S, T について、四角形 PQRS は $PS = QR$ かつ $PS \parallel QR$ を満たし、

$$\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TR} = \overrightarrow{TQ} \cdot \overrightarrow{TS}$$

が成り立つとする。このとき、四角形 PQRS は長方形であることを示せ。

2

ボタンを1回押すたびに0から9の10個の整数のうちの1つを表示する装置がある。どの整数が表示されるかは同様に確からしいとする。この装置を用いて次のルールでゲームをする。

- まず、2回続けてボタンを押して、表示された整数を順に X , Y とする。
- この X と Y が $|X - Y| \leq 1$ を満たすならば失敗で、それ以上ボタンを押すことはできないが、 $|X - Y| \geq 2$ を満たすならばもう1回ボタンを押すことができるとする。
- 3回目に表示された整数を Z として、この Z が $X < Z < Y$ または $Y < Z < X$ を満たすときは成功で、それ以外は失敗とする。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) ボタンを3回押すことができる確率を求めよ。
- (2) ゲームに成功する確率を求めよ。

3 m は実数とする。 x の 2 次方程式

$$x^2 - (m+2)x + 2m + 4 = 0$$

の $-1 \leq x \leq 3$ の範囲にある実数解がただ 1 つであるとき、 m の値の範囲を求めよ。ただし、重解の場合、実数解の個数は 1 つと数える。

4

以下の問いに答えよ。ただし、実数 x に対して、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すとする。

(1) k は整数とする。 $\left[\frac{x}{2}\right] = k$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2) $\left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{x}{3}\right] = 1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) $\left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{x}{3}\right]$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

5 p は正の実数とする。関数 $f(x)$ は、すべての実数 x について $f(x+p) = f(x)$ を満たし、 $0 \leq x \leq p$ において

$$f(x) = \frac{p}{2} - \left| x - \frac{p}{2} \right|$$

であるとする。また、

$$I_k = \int_{p(k-1)}^{pk} e^{-x} f(x) dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) I_1 を求めよ。

(2) $\frac{I_k}{I_1}$ を求めよ。

(3) n は自然数とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{pn} e^{-x} f(x) dx$ を求めよ。

6

2 次の項の係数がともに正の 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ について, 座標平面上の放物線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ をそれぞれ C_1 , C_2 とする。また, 直線 $y = \frac{1}{2}x$ を l とする。 C_1 と l は点 $(0, 0)$ で, C_2 と l は点 $(4, 2)$ で接し, C_1 と C_2 は点 $\left(\frac{4}{3}, \frac{22}{9}\right)$ で交わるとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。
- (2) 放物線 C_1 の $x \geq 0$ の部分と放物線 C_2 および直線 l によって囲まれる図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

7 $a_1 = a_2 = 1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について、次の 2 つの条件 p と q が同値であることを示せ。

p : すべての自然数 n に対して、 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ が成り立つ。

q : すべての自然数 n に対して、 $a_{n+1}^2 - a_{n+2} a_n = (-1)^n$ が成り立つ。

