前期日程試験

令和４年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない。

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**

3　この問題冊子の本文は，４ページからなっている。落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば，手をあげて監督者に知らせること。

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい。

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。

6　この問題冊子は持ち帰ること。

1 t は $0 < t < 1$ を満たす実数とする。平面上の $\triangle$ABC に対して，辺 BC，CA，AB をそれぞれ $t : (1 - t)$ に内分する点を D，E，F とする。

(1) $\triangle$ABC の重心と $\triangle$DEF の重心は一致することを証明せよ。

(2) $\triangle$ABC の面積を S とし，$\triangle$DEF の面積を T とする。$\dfrac{T}{S}$ を t を用いて表し，$\dfrac{T}{S}$ の最小値を求めよ。

(3) AB $= 3$，BC $= 5$，CA $= 4$ とする。$\triangle$DEF が直角三角形になるような t の値をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 関数$f(x)=xe^{-x}$について以下の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$の増減，極値，凹凸を調べ，$y=f(x)$のグラフの概形をかけ。

(2) $(m,\ n)$を$m+n=10$かつ$m\leqq n$を満たす整数の組とする。このような組$(m,\ n)$に対して$f(m)+f(n)$を考えるとき，$f(m)+f(n)$の値が最大となる組$(m,\ n)$を求めよ。ただし，必要ならば$\dfrac{5}{2}<e<3$であることは用いてよい。

3 n, m は自然数とする。赤玉と白玉の入った n 個の箱があり，次の条件(a), (b), (c)を満たすとする。

(a) それぞれの箱には赤玉と白玉が合計 n 個入っている。

(b) 赤玉はどの箱にも1個以上入っている。一方，白玉が入っていない箱はあってもよい。

(c) それぞれの箱に入っている赤玉の個数は互いに異なる。

以下の試行Tを行う。

T：太郎さんは n 個の箱からひとつの箱を無作為に選び花子さんに渡す。花子さんは渡された箱の中から「無作為に玉をひとつ取り出し，色を確認し同じ箱にもどす作業」を $m+2$ 回繰り返す。

(1) 試行Tにおいて，1回目から m 回目までに取り出した玉がすべて赤玉である事象を X とし，その確率を p_n とする。このとき $\lim_{n \to \infty} p_n$ を m を用いて表せ。

(2) 試行Tにおいて，$m+1$ 回目と $m+2$ 回目に取り出した玉のうち，少なくとも1個が赤玉である事象を Y とする．(1)の事象 X が起こったときの事象 Y の起こる条件付き確率 $P_X(Y)$ を q_n とする。このとき $\lim_{n \to \infty} q_n$ を m を用いて表せ。

4 nは3以上の整数とする。正n角形の外接円の半径を正n角形の半径とよぶ。

$2n+2$個の面で囲まれた凸多面体で，次の2つの条件(a)，(b)を満たすものをA_nとする。

(a) 2個の半径1の正n角形を面にもち，それらは平行である。

(b) (a)の2個の面の他に互いに合同な$2n$個の正三角形を面にもつ。

例えば，A_3は正八面体になる。$\theta = \dfrac{\pi}{n}$とおく。

(1) A_nの辺の数をnを用いて表せ。

(2) 条件(b)の正三角形の高さをθを用いて表せ。

条件(a)の2つの面の間の距離（一方の面から他方の面へ引いた垂線の長さ）をHとする。

(3) Hをθを用いて表せ。

(4) A_nの体積をVとするとき，$\dfrac{V}{nH}$をθを用いて表せ。

（計　算　用　紙）