令和4年度入学試験問題

数　学（理系）

200点満点

≪配点は，一般選抜学生募集要項に記載のとおり.≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと.
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページをあわせて16ページある.
3. 問題は全部で6題ある（1ページから2ページ）.
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない.
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと．ただし，続き方をはっきり示して見開きに隣接する計算用ページに解答の続きを書いてもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨を記すこと．このときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．また，余白ページに書かれたものは採点の対象としない.
6. 解答のための下書き，計算などは，計算用ページまたは余白ページに書いて，残しておいてもよい.
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある.
8. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない.
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない.

$\boxed{1}$

(30 点)

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ．ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

$\boxed{2}$

(35 点)

箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある．ただし $n \geqq 5$ とし，同じ番号の札はないとする．この箱から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に X，Y，Z とする．このとき，$Y - X \geqq 2$ かつ $Z - Y \geqq 2$ となる確率を求めよ．

$\boxed{3}$

(35 点)

n を自然数とする．3 つの整数 $n^2 + 2$，$n^4 + 2$，$n^6 + 2$ の最大公約数 A_n を求めよ．

$\boxed{4}$

(30 点)

四面体 OABC が

$$\mathrm{OA} = 4, \qquad \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 3, \qquad \mathrm{OC} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする．P を辺 BC 上の点とし，△OAP の重心を G とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ．

5

（35 点）

曲線 $C : y = \cos^3 x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$, x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする．$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ \cos^3 t)$ と原点 O，および $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 OPQR の面積を $f(t)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) S を求めよ．

(2) $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ．そのときの t を α とすると，$f(\alpha) = \dfrac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ であることを示せ．

(3) $\dfrac{f(\alpha)}{S} < \dfrac{9}{16}$ を示せ．

6

（35 点）

数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を次の式

$$x_1 = 0,\ x_{n+1} = x_n + n + 2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

$$y_{3m+1} = 3m,\ y_{3m+2} = 3m + 2,\ y_{3m+3} = 3m + 4 \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

により定める．このとき，数列 $\{x_n - y_n\}$ の一般項を求めよ．

問題は，このページで終わりである。