時間＝90分

数学

1. ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が $|\vec{a}-\vec{b}|=1$，$|3\vec{a}+2\vec{b}|=3$ を満たしているとき，

(1) $|\vec{a}|^2$ と $|\vec{b}|^2$ を $\vec{a}\cdot\vec{b}$ だけで表すと，

$$|\vec{a}|^2=\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\,\vec{a}\cdot\vec{b},\quad |\vec{b}|^2=\boxed{\text{ウ}}\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

である。

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ のとりうる値の範囲は，

$$\boxed{\text{エ}}\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|$ のとりうる値の最大値と最小値は，

$$\text{最大値}\ \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}},\quad \text{最小値}\ \boxed{\text{コ}}$$

である。

2. どの目も等しい確率で出る1個のサイコロを1回投げ，出た目が3の倍数ならば2点が加点され，3の倍数でなければ1点が減点されるゲームをくり返し行う。最初の持ち点を0点とするとき，

(1) 3回目のゲーム終了時に0点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(2) 6回目のゲーム終了時にはじめて0点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタチ}}}$ である。

(3) 3回目のゲーム終了時に0点になり，9回目のゲーム終了時に2回目の0点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツテト}}}{\boxed{\text{ナニヌネ}}}$ である。

(4) 9回目のゲーム終了時にはじめて0点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フヘホマ}}}$ である。

3. n を正の整数とする。連立不等式

$$\begin{cases} y\geqq 2^{\log_2 x+x} \\ y\leqq -x^2+n(2^n+n) \end{cases}$$

で表される領域を D_n とする。ただし，x 座標と y 座標がともに整数となる点を「格子点」と呼ぶものとする。

(1) D_2 に含まれる格子点の個数は $\boxed{\text{ミム}}$ 個である。

(2) $S=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n$ とするとき，

$$S=\left(n-\boxed{\text{メ}}\right)\cdot2^{n+\boxed{\text{モ}}}+\boxed{\text{ヤ}}$$

である。

(3) D_n に含まれる格子点の個数を n を用いて表すと，

$$\frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}n^3-\frac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}n^2+\frac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}}n-\boxed{\text{ロ}}+\left(n^2-\boxed{\text{ワ}}\,n+\boxed{\text{ン}}\right)\cdot2^n$$

である。

4. 平面上に点Oを中心とする半径が1の円 C_1 と，点Oを中心とする半径が $\sqrt{6}$ の円 C_2 がある。円 C_2 上に点Aをとり，点Aから円 C_1 に引いた接線と円 C_1 との接点の1つをP，直線OPと円 C_1 の交点のうち点Pと異なる点をQ，直線AQと円 C_1 との交点のうち点Qと異なる点をRとおく。

このとき，

$$\mathrm{AP}=\sqrt{\boxed{\text{あ}}},\quad \mathrm{AQ}=\boxed{\text{い}},\quad \mathrm{AR}=\frac{\boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{え}}}$$

であり，直線APと円 C_2 の交点のうち点Aと異なる点をS，直線AOと直線SQの交点をTとおくと，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PS}=\boxed{\text{お}}:\boxed{\text{か}},\quad \mathrm{ST}:\mathrm{TQ}=\boxed{\text{き}}:\boxed{\text{く}}$$

である。ここで，$\boxed{\text{お}}$ ～ $\boxed{\text{く}}$ は最小の自然数を用いて答えよ。

さらに，直線PRと直線OAの交点を点U，直線PRと円 C_2 の2つの交点をD，Eとすると，

$$\mathrm{AU}=\frac{\boxed{\text{け}}\sqrt{\boxed{\text{こ}}}}{\boxed{\text{さ}}}$$

であるので，

$$\mathrm{DU}\times\mathrm{EU}=\frac{\boxed{\text{しすせ}}}{\boxed{\text{そた}}}$$

である。

5. 関数 $f(x)$ は積分区間の範囲の中で定義される連続な関数である。ただし，a は実数の定数とし，e は自然対数の底とする。

(1) $\displaystyle\int_1^{\log x}f(t)\,dt=2x-2e$ のとき，$f(x)=\boxed{\text{ち}}\,e^x$ である。

(2) $\displaystyle\int_1^2(x+t)f(t)\,dt=f(x)+2x-4$ のとき，$f(x)=\dfrac{\boxed{\text{つてと}}\,x+\boxed{\text{なに}}}{5}$ である。

(3) $\displaystyle\int_1^{\log x}f(t)\,dt-\int_1^2(x+t)f(t)\,dt=2x+a$ のとき，

$$f(x)=\frac{\boxed{\text{ぬね}}\,e^x}{e^2-e-1}\ \text{であり，}\ a=\frac{\boxed{\text{の}}\,e^2+\boxed{\text{は}}\,e}{e^2-e-1}$$

である。