

注 意 事 項

1. 開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 開始の合図の後、解答にかかる前に、まず、問題の部分が2ページからなっていることを確認すること。
3. 問題は全部で4問ある。
4. 試験中に印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
5. 解答は解答冊子のそれぞれの問題に対応する欄の中に記入しなさい。
6. 解答冊子は持ち帰ってはいけない。
7. この問題冊子は持ち帰ること。



(このページは空白)

1

数列  $\{a_n\}$  は、 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を満たす。  
複素数  $z_n$  を

$$z_n = \cos \frac{2\pi a_n}{3} + i \sin \frac{2\pi a_n}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。ただし、 $i$  は虚数単位である。このとき、以下の問いに答えよ。

(1)  $|z_3 - z_2|$  の値を求めよ。

(2)  $z_n \neq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) であることを示せ。

(3)  $z_1, z_2, \dots, z_{100}$  のうち、実数であるものの個数を求めよ。

2

$xy$  平面上を移動する点 P を考える。最初、P は原点  $(0, 0)$  にあり、次の 2 つの規則に従って 6 回移動する。

規則 1：P が直線  $y = 2$  上にないときは、確率  $p$  で  $x$  軸方向に  $+1$  だけ移動し、確率  $1-p$  で  $y$  軸方向に  $+1$  だけ移動する。ただし、 $0 < p < 1$  とする。

規則 2：P が直線  $y = 2$  上にあるときは、確率 1 で  $x$  軸方向に  $+1$  だけ移動する。

例えば、P が点  $(3, 1)$  にあるときは、確率  $p$  で点  $(4, 1)$  に移動し、確率  $1-p$  で点  $(3, 2)$  に移動する。また、P が点  $(2, 2)$  にあるときは、確率 1 で点  $(3, 2)$  に移動する。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) P が点  $(5, 1)$  に到達する確率を求めよ。

(2) P が点  $(4, 2)$  に到達する確率を求めよ。

(3) P が点  $(4, 2)$  に到達したとき、点  $(3, 1)$  を通過していた条件付き確率を求めよ。

**3**

曲線  $x^3 - 2xy + y^2 = 0$  のうち,  $x \geq 0$  を満たす部分を  $C$  とする。このとき, 以下の問い合わせに答えよ。

- (1)  $C$  上の点の  $x$  座標がとり得る値の範囲を求めよ。
- (2)  $C$  上の点の  $y$  座標がとり得る値の範囲を求めよ。
- (3)  $C$  で囲まれた図形の面積を求めよ。

**4**

$xyz$  空間内に 3 点  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(-1, \sqrt{3}, 0)$ ,  $C(-1, -\sqrt{3}, 0)$  がある。 $0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$  とし,  $xy$  平面上で原点を中心として, 3 点  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を  $\theta$ だけ回転させた点をそれぞれ  $D$ ,  $E$ ,  $F$  とする。回転の向きは,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき,  $D$  の座標が  $(0, 2, 0)$  となるように定める。さらに 3 点  $D$ ,  $E$ ,  $F$  を  $z$  軸方向に 6 だけ平行移動した点をそれぞれ  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  とする。このとき, 以下の問い合わせに答えよ。

- (1)  $\theta = \frac{5}{12}\pi$  のとき, 点  $Y$  の座標を求めよ。
- (2) 三角形  $ABX$  の面積の最大値とそのときの  $\theta$  の値を求めよ。
- (3) 三角形  $XYZ$  の重心を  $G$  とする。四面体  $GABC$  に内接する球の半径  $r$  を求めよ。





