（前期日程）

# 令和５年度　　数　　学

**問題の選択方法**

以下に示す問題を解答すること。

| 学　部 | 学科等 | 解答する問題 |
|---|---|---|
| 教育学部 | 学校教育教員養成課程<br>（「数Ⅰ・数Ⅱ・数Ａ・数Ｂ」　受験者） | 1 2 3 |
| | 学校教育教員養成課程<br>（「数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ」受験者） | 2 3 4 |
| 理学部 | 理学科　数学受験 | 4 5 6 |
| 医学部 | 医学科 | 4 5 6 |
| 工学部 | 工学科　**理型**入試<br>（社会デザインコースを除く） | 4 5 6 |
| | 工学科　**文理型**入試<br>（社会デザインコース） | 1 2 3 |
| 農学部 | 全学科 | 1 2 3 |

**注 意 事 項**

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は，８ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。

4　解答は，すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。

5　問題冊子の余白は下書きに使用してよい。

6　解答用紙はすべて机の上に出しておくこと。机の中に入れてはいけません。

**1** （教育学部（「数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B」受験者），工学部工学科文理型入試（社会デザインコース），農学部）

以下の問いに答えよ。

(1) $A$ が鋭角で，$\cos A = \dfrac{1}{5}$ を満たすとき，$\sin A$ と $\tan A$ の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin x + \cos 2x < 0$ を解け。

(3) A，B の 2 つの袋があり，A には赤玉が 1 個と青玉が 3 個，B には赤玉が 2 個と青玉が 2 個入っている。A から同時に 2 個，B から同時に 2 個の玉を取り出すとき，これら 4 個の玉のうち，赤玉が 1 個となる確率を求めよ。

(4) △ABC の辺 AB の中点を P とし，辺 AC を 2：1 に内分する点を Q とする。線分 BQ と線分 CP の交点を R とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たす実数 $s$，$t$ の値を求めよ。

(5) $\log_3 5$，$\dfrac{3}{2}$，$\log_9 24$ を大きい順に並べよ。

数学の試験問題は次に続く。

**2** (教育学部，工学部工学科文理型入試(社会デザインコース)，農学部)

以下の問いに答えよ。

(1) $x$，$y$を正の実数とする。円柱の底面の周の長さが$x$，高さが$y$であり，$2x + y = 6\pi$ を満たすとする。このとき，円柱の体積$V$を$x$を用いて表せ。また，$V$の最大値を求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$が$a_1 = 2$，$a_{n+1} = {a_n}^2 + 2$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)を満たすとする。$m$を自然数とするとき，$a_{2m}$は6の倍数であることを示せ。

(3) 正の実数$a$に関する次の命題の真偽を答えよ。また，真であるときは証明を与え，偽であるときは反例をあげよ。ただし，$\sqrt{2}$は無理数であることを用いてよい。

(i) $a$が自然数ならば$\sqrt{a}$は無理数である。

(ii) $a$が自然数ならば$\sqrt{a} + \sqrt{2}$は無理数である。

数学の試験問題は次に続く。

**3** （教育学部，工学部工学科文理型入試（社会デザインコース），農学部）

以下の問いに答えよ。

(1) $n$ を自然数とする。連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq x(2n - x) \end{cases}$$

の表す領域を $D_n$ とし，$D_n$ に属する格子点の個数を $a_n$ とする。ただし，座標平面上の点 $(x,\ y)$ において，$x,\ y$ がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点という。

(i) $D_2$ を図示せよ。

(ii) $a_2$ を求めよ。

(iii) $k$ を $0 \leqq k \leqq 2n$ を満たす整数とする。$D_n$ と直線 $x = k$ の共通部分に属する格子点の個数を $k,\ n$ を用いて表せ。

(iv) $a_n$ を求めよ。

(2) 曲線 $y = 2x^2 - 4x + 6$ を $C$ とする。また，$p$ を正の実数とし，点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を考える。

(i) $2p^2 - 4p + 6 > p^2$ を示せ。

(ii) 点 P から曲線 $C$ に引いた 2 つの接線のうち，一方の接線の傾きが 0 であるとする。このとき，$p$ の値を求めよ。さらに，2 つの接線についてそれぞれの方程式を求めよ。

(iii) 曲線 $C$ と (ii) で求めた 2 つの接線とで囲まれた図形の面積を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

**4** (教育学部(「数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B」受験者), 理学部, 医学部, 工学部工学科理型入試(社会デザインコースを除く))

次の $\boxed{\phantom{ア}}$ に適する数を，解答用紙の指定のところに記入せよ。

(1) $a$, $b$ を実数とする。関数 $f(x) = \dfrac{x+10}{x^2+7x+14}$ について，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0, f(0))$ における接線の方程式が $y = ax + b$ であるとき，$a =$ $\boxed{ア}$，$b =$ $\boxed{イ}$ である。

(2) 関数 $f(x) = -x - 1 + \sqrt{4x+1}$ $(x \geqq 0)$ について，$f(x) \geqq 0$ であるための必要十分条件は $0 \leqq x \leqq$ $\boxed{ウ}$ であり，また，$f(x)$ の最大値は $\boxed{エ}$ である。

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x + \tan x)\,dx =$ $\boxed{オ}$ であり，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |x + \tan x|\,dx =$ $\boxed{カ}$ である。

(4) 関数 $f(x) = x$, $g(x) = 2x\sin x$ について，$f'(0) = 1$ であり，$g'(0) =$ $\boxed{キ}$ である。また，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}$ において，直線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ とで囲まれた図形の面積は $\boxed{ク}$ である。

(5) 正六角形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ が与えられている。1個のさいころを3回続けて投げて，出た目を順に $a$, $b$, $c$ とする。このとき，3点 $P_a$，$P_b$，$P_c$ が三角形を作る確率は $\boxed{ケ}$ であり，正三角形を作る確率は $\boxed{コ}$ である。

数学の試験問題は次に続く。

**5** （理学部，医学部，工学部工学科理型入試（社会デザインコースを除く））

以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 2,\ a_{n+1} = {a_n}^2 + 2$ （$n = 1, 2, 3, \cdots$）を満たすとする。$m$ を自然数とするとき，$a_{2m}$ は 6 の倍数であることを示せ。

(2) 正の実数 $a$ に関する次の命題の真偽を答えよ。また，真であるときは証明を与え，偽であるときは反例をあげよ。ただし，$\sqrt{2}$ は無理数であることを用いてよい。

(i) $a$ が自然数ならば $\sqrt{a}$ は無理数である。

(ii) $a$ が自然数ならば $\sqrt{a} + \sqrt{2}$ は無理数である。

(3) $i$ を虚数単位とする。複素数平面において，点 $z$ が，2 点 0，$i$ を結ぶ線分の垂直二等分線上を動くとき，$w = \dfrac{2z - 1}{iz + 1}$ を満たす点 $w$ のえがく図形を求めよ。

数学の試験問題は次に続く。

**6** (理学部，医学部，工学部工学科理型入試(社会デザインコースを除く))

以下の問いに答えよ。

(1) $n$ を自然数とする。連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq x(2n-x) \end{cases}$$

の表す領域を $D_n$ とし，$D_n$ に属する格子点の個数を $a_n$ とする。ただし，座標平面上の点 $(x,\ y)$ において，$x,\ y$ がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点という。

(i) $D_2$ を図示せよ。

(ii) $a_2$ を求めよ。

(iii) $k$ を $0 \leqq k \leqq 2n$ を満たす整数とする。$D_n$ と直線 $x=k$ の共通部分に属する格子点の個数を $k,\ n$ を用いて表せ。

(iv) $a_n$ を求めよ。

(v) 直線 $y=0$ と曲線 $y=x(2n-x)$ とで囲まれた図形の面積を $b_n$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

(2) $\alpha$を$0 < \alpha < \pi$を満たす実数とする。また，$\theta$を$0 \leqq \theta \leqq \alpha$を満たす実数とする。点Oを原点とする座標平面上において，単位円を考える。単位円の周上に点Aをとる。さらに，Oを中心として，時計の針の回転と逆の向きに，

Aを$\dfrac{\pi}{2}$だけ回転した点をB,

Aを$\alpha$だけ回転した点をC,

Aを$\theta$だけ回転した点をP,

Aを$\theta+\dfrac{\pi}{2}$だけ回転した点をQ

とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$とする。

(i) 内積$\vec{p}\cdot\vec{q}$，$\vec{q}\cdot\vec{q}$を求めよ。

(ii) 内積$\vec{c}\cdot\vec{q}$を$\alpha$，$\theta$を用いて表せ。

(iii) 実数$s$，$t$を用いて，$\vec{c}=s\vec{p}+t\vec{q}$と表すとき，$t$を$\alpha$，$\theta$を用いて表せ。

(iv) (iii)で求めた$t$を用いて，$\vec{r}=t\vec{q}$とおく。実数$u$，$v$を用いて，$\vec{r}=u\vec{a}+v\vec{b}$と表すとき，$u$を$\alpha$，$\theta$を用いて表せ。

(v) (iv)で求めた$u$を用いて，$\vec{d}=u\vec{a}$とおく。$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$のとき，$\vec{d}$の大きさ$|\vec{d}|$の最大値を求めよ。