令 和 6 年 度

前 期 日 程

数　　　学

教育学部［数学(ロ)］

医学部医学科

工学部

応用生物科学部［数学(ロ)］

問　題　冊　子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は5ページで，解答用紙は5枚である。
   落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。
3. **受験番号は，5枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。**
4. 問題は，大問5題である。
5. **大問の配点比率は全て20％である。**
6. **解答は，解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし，やむをえない場合は裏面にまわってよいが，表面に「裏に続く」と明記すること。**
7. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
8. 解答用紙は持ち帰らないこと。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

1 a, b, c をそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 のうちいずれか 1 つの数とする。ただし, a, b, c のうち, 等しい数があってもよいこととする。以下の問に答えよ。

(1) $(b-a)(c-b)(a-c) \neq 0$ を満たす (a, b, c) は何通りあるか。

(2) $(b-a)(c-b) > 0$ を満たす (a, b, c) は何通りあるか。

(3) $(b-a)(c-b) < 0$ を満たす (a, b, c) は何通りあるか。

(4) $(b-a)(c-b)(a-c) > 0$ を満たす (a, b, c) は何通りあるか。

2 nを自然数，x，yを正の実数とする。以下の問に答えよ。ただし，必要ならば $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$，$0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ を用いてよい。

(1) 相加平均と相乗平均の関係 $\sqrt{xy} \leqq \dfrac{x+y}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\dfrac{1}{2}(\log_{10} x + \log_{10} y) \leqq \log_{10}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ が成り立つことを示せ。

(3) kを$k \leqq n$を満たす自然数とする。$\dfrac{1}{2}(\log_{10} k + \log_{10}(n+1-k)) \leqq \log_{10}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ が成り立つことを示せ。

(4) $\log_{10}(n!) \leqq n \log_{10}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ が成り立つことを示せ。

(5) 2024! の桁数は 6100 以下であることを示せ。

3 $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ とする。正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{c}$ とし，AB を $s : (1-s)$ に内分する点を P，CD を $t : (1-t)$ に内分する点を Q，EP と FQ の交点を I とする。以下の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，t を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{FI}} = k\overrightarrow{\mathrm{FQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EI}} = m\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ とする。k，m を s，t を用いてそれぞれ表せ。

(4) $\triangle\mathrm{EFI}$ と $\triangle\mathrm{PQI}$ の面積をそれぞれ S，S' とする。$s + t = 1$ を満たしながら点 P，点 Q が動くとき，$\dfrac{S}{S'}$ のとり得る値の範囲を求めよ。

4 関数 $f(x) = x^2 - 1 - 2x\log x$ $(x > 0)$を考える。以下の問に答えよ。
ただし，$\log x$ は x の自然対数である。

(1) 関数 $f(x)$を微分せよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$の変曲点の座標を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$，x 軸，および2直線 $x = \dfrac{1}{2}$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

5 数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$が,

$$a_1 = 1\ , \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}a_n - \frac{1}{4}b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_1 = 1\ , \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{\sqrt{3}}{4}b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。複素数z_nを$z_n = a_n + i\,b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。以下の問に答えよ。ただし,$i$は虚数単位とする。

(1) 複素数z_1の絶対値$|z_1|$と偏角$\theta_1\,(0 \leqq \theta_1 < 2\pi)$を,それぞれ求めよ。

(2) すべての自然数nに対して

$$z_{n+1} = r(\cos\theta + i\sin\theta)z_n$$

となるような正の実数rと$\theta\,(0 \leqq \theta < 2\pi)$の値を,それぞれ求めよ。

(3) a_nとb_nをnを用いてそれぞれ表せ。

(4) $a_n = b_n$となる自然数nを小さいほうから順に$m(1)$,$m(2)$,$m(3)$,$\cdots$とする。$a_{m(k)}$をkを用いて表せ。